MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
*Liberté
Égalité
Fraternité*

Conseil scientifique
de l'éducation nationale

DE LA MULTIPLICATION AUX FRACTIONS : RÉCONCILIER INTUITION ET SENS MATHÉMATIQUE

Synthèse de la recherche et recommandations

Texte rédigé par
Emmanuel Sander,
Monica Neagoy,
Catherine Rivier,
Calliste Scheibling-Sève,
Gérard Sensevy
et Catherine Thevenot

Ce texte a été rédigé dans le cadre des travaux du groupe de travail « Pédagogies et manuels scolaires » du Conseil scientifique de l'éducation nationale par **Emmanuel Sander, Monica Neagoy, Catherine Rivier, Calliste Scheibling-Sève, Gérard Sensevy et Catherine Thevenot**[1].

Groupe de travail « Pédagogies et manuels scolaires » du Conseil scientifique de l'éducation nationale

Le groupe de travail « Pédagogies et manuels scolaires » (GT3) se donne pour objectif de dresser un bilan des relations entre les résultats de la recherche, les dispositifs pédagogiques proposés (dont font partie les manuels scolaires), les pratiques d'enseignement correspondantes et les apprentissages des élèves. Il entend également être force de proposition sur ces questions. Après s'être intéressé à l'apprentissage de la lecture, le GT3 consacre ses travaux aux apprentissages mathématiques, pour lesquels les résultats aux évaluations internationales récentes justifient une focale toute particulière. Ses travaux ont notamment conduit à l'organisation de la conférence internationale « Mathématiques pour tous : faire aimer et pratiquer les maths de l'école au lycée » disponible en replay sur reseau-canope.fr/mathematiques-pour-tous ou reseau-canope.fr/conseil-scientifique-de-leducation-nationale.

Les membres du GT3

• **Coordination :** Emmanuel Sander, professeur à la faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de l'université de Genève / IDEA • Marie Amalric, chercheuse post-doctorante à NeuroSpin • Sandra Andreu, cheffe du bureau de la conception et du pilotage des évaluations des élèves, DEPP, MENJ • Eric Baccala, chargé d'études au bureau des écoles, DGESCO, MENJ • Jérôme Deauvieau, professeur de sociologie à l'ENS / Centre Maurice Halbwachs • Stanislas Dehaene, président du CSEN, professeur de psychologie cognitive expérimentale au Collège de France / NeuroSpin • Etienne Ghys, secrétaire perpétuel de l'académie des sciences • Valeria Giardino, chargée de recherche au CNRS / Institut Jean Nicod • Paul Gioia, chercheur doctorant à l'Ined • Virginie Giraud, chargée d'études au bureau des collèges, DGESCO, MENJ • Rémi Guyot, adjoint à la cheffe du bureau des écoles, DGESCO, MENJ • Olivier Hunault, inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche, IGESR, MENJ • Véronique Izard, chargée de recherche au CNRS/ Centre de neurosciences intégratives et cognition de l'université de Paris • Marie Lubineau, chercheuse doctorante en sciences sociales et sciences de l'éducation à NeuroSpin • Pauline Martinot, médecin, chercheuse doctorante à NeuroSpin • Monica Neagoy, autrice bilingue, formatrice et consultante internationale en mathématiques • Sofia Nogueira, cheffe du bureau des collèges, DGESCO, MENJ • Cassandra Potier-Watkins, chercheuse post-doctorante au Collège de France • Isabelle Renault, référente pédagogique mathématiques, Réseau Canopé • Catherine Rivier, chargée d'enseignement et chercheuse doctorante / IDEA • Thierry Rocher, adjoint au sous-directeur des évaluations et de la performance scolaire, DEPP, MENJ • Calliste Scheibling-Sève, chercheuse post-doctorante à l'université de Genève/ IDEA • Gérard Sensevy, professeur de sciences de l'éducation à l'université de Bretagne Occidentale / CREAD • Olivier Sidokpohou, inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche, IGESR, MENJ • Elizabeth Spelke, professeure de psychologie à l'université Harvard • Catherine Thevenot, professeure de psychologie à l'université de Lausanne / LABCD • Charles Torossian, inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche, directeur de l'IH2EF • Johan Yebbou, inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche, IGESR, MENJ.

1 Emmanuel Sander, professeur à l'université de Genève ; Monica Neagoy, autrice et consultante internationale en mathématiques ; Catherine Rivier, chargée d'enseignement et chercheuse doctorante à l'université de Genève ; Calliste Scheibling-Sève, chercheuse post-doctorante à l'université de Genève ; Gérard Sensevy, professeur à l'université de Bretagne Occidentale et Catherine Thevenot, professeure à l'université de Lausanne. En collaboration avec le LéA « Réseau ACE Armorique-Méditerranée ». Remerciements à la DEPP pour les données fournies et à Thierry Dias, professeur à la HEP Vaud, pour sa contribution.

Sommaire

Résumé

La compréhension mathématique est décisive pour le citoyen du 21e siècle, dans la sphère personnelle comme professionnelle. Elle intervient dans la lecture de graphiques et l'interprétation de statistiques tout comme dans la rigueur des raisonnements et l'exercice de l'esprit critique. Dans un contexte de résultats préoccupants aux évaluations nationales et internationales, tant pour le niveau en mathématiques que pour le poids de l'origine sociale, ce texte cible les structures multiplicatives se focalisant sur la multiplication, la division et les fractions. Moins étudiées que les structures additives, les structures multiplicatives font partie du socle des connaissances arithmétiques tout en constituant des prérequis au développement de compétences mathématiques ultérieures.

Ces connaissances sont de nature conceptuelles (les principes mathématiques en jeu) et procédurales (les algorithmes de résolution). Connaissances conceptuelles et procédurales, bien que distinctes, sont intriquées et se construisent ensemble. Ainsi, mettre en œuvre une stratégie de résolution dans des contextes appropriés dépend de connaissances conceptuelles. Les connaissances conceptuelles des élèves s'appuient sur des intuitions initiales, issues d'expériences extra scolaires, avec lesquelles ils abordent les notions enseignées. Ces conceptions intuitives ont l'intérêt majeur d'offrir un sens aux notions rencontrées et l'inconvénient d'être trompeuses dans certains contextes. Un enjeu crucial pour la progression des élèves est de prendre appui sur les conceptions intuitives pour rencontrer progressivement le sens mathématique.

Alors que les conceptions intuitives de la multiplication, de la division et des fractions sont respectivement l'addition itérée, le partage équitable et la structure bipartite composée du couple « numérateur, dénominateur », il s'agit de favoriser un nouveau codage des situations rencontrées par les élèves pour ouvrir la possibilité de développer une expertise adaptative conduisant à mobiliser la stratégie la plus appropriée au contexte rencontré, en s'appuyant sur les propriétés mathématiques. Des activités de comparaison entre situations avec le recours à des représentations figurées constituent des aides pour accompagner ce recodage et initier la perception de principes mathématiques occultés par les conceptions intuitives.

Ainsi, le rectangle constitue une modélisation de la multiplication et de la division. Pour développer les conceptions de la multiplication, un schéma qui met l'accent sur le rapport entre les éléments en présence peut aussi être mobilisé, qui ne souffre pas des mêmes limites que celui de l'addition répétée. Il permet de faire usage de manière flexible des tables de multiplication, dont l'automatisation, favorisée par des tâches de production, est cruciale pour libérer les ressources cognitives pour des apprentissages plus complexes. Le schéma « partitif » intuitif de division est présent précocement chez les élèves mais sans que les propriétés mathématiques pertinentes associées le soient également. La division gagne à être travaillée dans des contextes de quotition (*combien de groupes de ? ou combien de fois ?*) qui n'offrent pas les mêmes contraintes conceptuelles que les situations de partage.

Les fractions sont l'objet de difficultés importantes d'apprentissage, qui prennent leur source dans la conception bipartite, selon laquelle numérateur et dénominateur sont traités comme deux nombres indépendants. En outre, des représentations traditionnellement mobilisées telles qu'un nombre de parts (qui forme le numérateur) sur une totalité découpée en parts (dont le nombre forme le dénominateur) offrent une conception seulement partielle. Une diversité de conceptions telles que la partie d'un tout non unitaire, le quotient d'une division, la position d'un point sur la droite numérique, peuvent toutes être soutenues par des représentations figurées et des activités destinées à leur donner sens. Elles constituent autant de points de vue que l'élève peut apprendre à mobiliser en situation pour développer son expertise des fractions et se préparer aussi à des apprentissages ultérieurs.

Introduction

Au-delà d'une excellence pointue aux retombées majeures, sur le plan de la recherche fondamentale comme appliquée, les mathématiques sont essentielles à tout citoyen du 21e siècle, dans la vie professionnelle comme personnelle. Loin d'être une compétence élitiste, la compréhension mathématique est mobilisée dans la vie de chacun pour les calculs de la vie quotidienne, la mesure des longueurs et des quantités, la lecture de graphiques, l'interprétation de toute donnée chiffrée, etc. Elle soutient aussi la qualité des raisonnements, la capacité d'évaluation des risques et le développement de l'esprit critique. Peu de domaines au 21e siècle peuvent se passer de modèles mathématiques et nombre de métiers font appel à des mathématiques de difficulté variable. Les notions travaillées à l'école primaire et au collège constituent des acquis indispensables dans de nombreuses professions et sont aussi un socle nécessaire aux acquisitions de notions plus avancées, mathématiques ou extra-mathématiques, pour des métiers où la technicité attendue est plus grande.

Depuis plusieurs décennies, on observe une baisse du niveau des élèves français en mathématiques et un accroissement de l'effet de l'origine sociale (DEPP, 2020a ; 2020b). Ces résultats préoccupants fondent la nécessité d'efforts ciblés pour contrer une tendance sur une question à la fois large et focalisée, celle des structures multiplicatives et tout particulièrement de la multiplication, de la division et des fractions. Qu'est-ce qui a guidé ce choix ?

Tout d'abord, le champ des mathématiques est si large que toute prétention d'exhaustivité est à exclure. Ensuite, il a semblé important de privilégier des compétences qui relèvent d'un incontestable socle commun, et à propos desquelles des attentes existent pour l'ensemble des élèves du système scolaire. Il s'agit de favoriser l'appropriation par les élèves de notions essentielles et néanmoins difficiles, telles que les fractions et la fameuse « règle de trois », qu'ils seront amenés à mobiliser de manière régulière dans une diversité de situations tout au long de leur vie. En outre, si cette appropriation se révélait lacunaire, elle ferait obstacle aux apprentissages de nouvelles notions qui en dépendent. Or de nombreux travaux portent déjà sur les structures qualifiées d'additives, qui concernent les situations pour lesquelles les opérations d'addition et/ou de soustraction sont suffisantes. Il nous a semblé prioritaire de privilégier des notions moins rebattues, également fondamentales, et pour lesquelles des difficultés importantes existent. C'est le cas des multiplications, des divisions et des fractions, dont une certaine maîtrise est essentielle tant pour les compétences générales évoquées ci-dessus que pour les apprentissages mathématiques ultérieurs.

Le sous-titre « réconcilier intuition et sens mathématique » appelle à être commenté. En effet, une idée qui parcourt ce texte est que les acquisitions mathématiques, pour être vraiment utiles, doivent faire pleinement sens pour les élèves : l'application aveugle de règles absconses ne peut seule faire office de progrès en mathématiques. Cela implique de favoriser une compréhension profonde des notions qui s'apparente à de l'intuition. S'approprier une connaissance, une idée, c'est la faire sienne. On évoquera à ce sujet la parabole du mathématicien Henri Poincaré, déclarant qu'un chien mangeant une oie emmagasine de la graisse de chien et non de la graisse d'oie (Apéry, 1982). Or les notions mathématiques sont d'abord appréhendées par des intuitions premières, aussi nommées conceptions intuitives, par exemple que multiplier c'est additionner plusieurs fois, que diviser c'est partager, ou qu'une fraction est un un couple de nombres. Ces intuitions initiales, largement issues du langage et des expériences de la vie quotidienne, présentent l'intérêt crucial de permettre aux élèves de donner sens aux situations rencontrées en classe. Mais elles sont aussi partiellement trompeuses et expliquent de nombreuses difficultés auxquelles les élèves font face. Elles le sont par exemple lorsqu'il s'agit de multiplier ou de diviser par une valeur décimale comprise entre 0 et 1, ou de comparer entre elles deux fractions. Il s'agit donc, afin de ne pas rompre avec la précieuse et nécessaire attribution de sens, de s'appuyer sur les intuitions premières pour les dépasser et soutenir la construction d'intuitions nouvelles, cette fois en phase avec le sens mathématique.

Nous émettons le vœu que cette contribution aide à soutenir les apprentissages des élèves, ce qui signifie avant tout soutenir les enseignants dans la tâche difficile de faire partager des notions riches et subtiles et de communiquer la beauté des mathématiques.

1. Connaissances conceptuelles et procédurales, conceptions intuitives, codages et recodages

1.1 Connaissances conceptuelles et procédurales : distinguables mais indissociablement liées

À propos des notions mathématiques travaillées à l'école, il existe une distinction classique entre les connaissances conceptuelles et les connaissances procédurales (Hiebert, 1986). Les connaissances conceptuelles relèvent de la compréhension du sens d'une notion mathématique et concernent les principes mathématiques associés à une notion (Crooks & Alibali, 2014). Il s'agit par exemple du fait que 1 est un élément neutre pour la multiplication ($a \times 1 = a$), que multiplication et division sont deux opérations réciproques l'une de l'autre ($a / a = 1$), de la commutativité ($a \times b = b \times a$) et de l'associativité ($a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$) de la multiplication, de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ($a \times (b + c) = a \times b + a \times c$), ou encore du fait que multiplier une fraction par la fraction inverse donne le résultat 1 ($a \times 1 / a = 1$), que le produit et la somme de deux fractions sont encore des fractions, etc.

Les connaissances procédurales sont en revanche directement liées aux moyens mis en œuvre pour atteindre un objectif, le « savoir comment faire » (Baroody, 2003), à travers le déploiement d'algorithmes de résolution (Rittle-Johnson, 2019). Il s'agit typiquement aux cycles 2 et 3 de réaliser un calcul ou une séquence de calculs. Par exemple, l'addition de deux fractions par détermination d'un dénominateur commun puis par addition des numérateurs et simplification de la fraction résultante, nécessite la mise en œuvre de connaissances procédurales. Plus tard dans la scolarité, avec le développement des apprentissages algébriques, il s'agira aussi des algorithmes de résolution impliquant des variables, comme la résolution d'équations avec une ou plusieurs inconnues. Les connaissances procédurales sont indispensables dans de nombreuses tâches mathématiques. Elles constituent un objectif identifiable de maîtrise d'un socle de compétences que l'on peut attendre des élèves.

Même si la distinction entre ces deux formes de connaissances peut paraître aisée, connaissances conceptuelles et procédurales sont en fait indissociablement liées et même profondément intriquées (Rittle-Johnson, Schneider, & Star, 2015 ; Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Et sans que cela remette en cause l'importance de leur acquisition, les connaissances procédurales sont plutôt la partie émergée de l'iceberg des connaissances mathématiques (Prather & Alibali, 2009). En effet, hormis le cas des faits numériques mémorisés, comme les tables de multiplication apprises par cœur, tous les calculs reposent sur des règles, et le recours à des principes mathématiques peut influencer considérablement la manière de les mener. Par exemple, le calcul $\frac{1}{4} \times \frac{17}{12} + \frac{17}{12} \times \frac{3}{4}$ peut se résoudre par une succession de mises au même dénominateur ou, de manière bien plus directe, par la prise en compte de la commutativité de la multiplication et de sa distributivité par rapport à l'addition $[(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) \times \frac{17}{12} = \frac{17}{12}]$.

Plus généralement ce que « l'on a le droit » ou pas de réaliser comme calcul dépend de connaissances conceptuelles. C'est également le cas de la reconnaissance des situations dans lesquelles telle ou telle stratégie de résolution est applicable. Cette reconnaissance est au cœur de la question essentielle du transfert d'apprentissage et s'apparente à la reconnaissance de contextes où une certaine notion mathématique peut être mobilisée à bon escient. En outre, il est de moins en moins considéré que les connaissances conceptuelles sont celles qui s'expriment uniquement verbalement, telles que par des définitions (Robinson, 2017). En effet, la capacité de mise en œuvre en situation des principes mathématiques concernés fait aussi partie des connaissances conceptuelles : la capacité de formuler une définition dit relativement peu de choses de l'application en situation du principe mathématique concerné (Greeno, 1993). Il n'est donc pas imaginable de découper les connaissances des élèves entre certaines purement théoriques et d'autres purement pratiques (Crooks & Alibali, 2014 ; Rittle-Johnson, 2019). Au contraire, ce sont de plus en plus les procédures mises en œuvre par les élèves qui sont considérées comme des indicateurs pertinents de l'existence de telle ou telle connaissance conceptuelle (Robinson, 2017). Ainsi, pour saisir les difficultés rencontrées par un élève dans la réalisation de telle ou telle tâche, ou les erreurs les plus susceptibles d'être commises, il est essentiel d'identifier les connaissances conceptuelles inadéquates à l'origine de la difficulté ou de l'erreur.

1.2 Identifier les conceptions intuitives pour favoriser leur transformation

Les connaissances conceptuelles inadéquates sont souvent liées au point de vue initial des élèves sur les notions concernées. En effet, les notions mathématiques font l'objet de conceptions intuitives de la part des élèves (Lautrey, Rémi-Giraud, Sander, & Tiberghien, 2008). Ces conceptions ont pour source des connaissances issues de la vie de tous les jours, qui se substituent aux notions mathématiques. Certains auteurs utilisent le terme de modèles tacites (Fischbein, 1989), d'autres de métaphores conceptuelles (Lakoff & Núñez, 2000), d'autres encore de connaissances naïves (Sander, 2008). L'idée commune est qu'une notion scolaire est comprise à travers une conception extrascolaire, issue de l'expérience quotidienne. Parce qu'elles confèrent aux élèves une certaine intuition d'une notion mathématique et lui donnent ainsi du sens, les conceptions intuitives sont loin d'exercer une influence uniquement négative. Elles conditionnent même la compréhension première d'une notion car la seule manière de donner sens à une situation nouvelle est, par analogie, de la rapprocher d'une situation connue qui paraît semblable. Elles posent toutefois la difficulté de ne pas couvrir l'intégralité des situations dans lesquelles une notion s'applique. Cela peut conduire les élèves dans une impasse ou à des erreurs lorsque la situation qu'ils rencontrent ne relève pas, selon leur conception intuitive, de la notion concernée. Il y a donc un enjeu d'apprentissage crucial à ce que les connaissances procédurales des élèves puissent être décontextualisées des seules conceptions intuitives des notions qui leur sont attachées afin de pouvoir aussi être mises en œuvre lorsque les conceptions intuitives ne sont pas en phase avec les notions mathématiques.

1.2.1 Angles morts de l'expertise et de l'intuition, domaine de validité des conceptions intuitives

Sans que puissent facilement être démêlées la part qui revient aux activités de classe de celles qui proviennent plus largement de la culture et du langage, les conceptions intuitives s'avèrent fortement partagées au sein d'une population d'élèves. L'enseignant est alors confronté à un double défi :

– d'une part se prémunir au maximum de « l'angle mort de l'expertise » (Nathan & Petrosino, 2003), qui le conduit à ignorer la difficulté de l'élève parce que, ayant lui-même surmonté celle-ci depuis longtemps, l'enseignant en a perdu la conscience ;

– d'autre part, ne pas être influencé par « l'angle mort de l'intuition » (Gvozdic & Sander, 2018), car certaines conceptions intuitives sont tellement prégnantes qu'il est difficile y compris pour des adultes professionnels de l'enseignement d'en faire abstraction (Tirosh & Graeber, 1991) et de concevoir des activités de classe qui favorisent leur dépassement. Il est à noter qu'être influencé par ses conceptions intuitives est inéluctable et n'est pas synonyme de défaut de compétence. Il a par exemple été montré que même des experts en mathématiques pouvaient être mis en difficulté dans la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires dans les contextes où les intuitions fourvoient (Gros, Sander, & Thibaut, 2019). Sur le plan des apprentissages, il est extrêmement intéressant pour un enseignant de positionner les situations travaillées en classe par rapport aux conceptions intuitives des notions concernées. Pour cette raison, une attention particulière est portée dans ce texte à l'introduction de situations qui paraissent souvent atypiques pour la raison même qu'elles vont à l'encontre de ces conceptions intuitives. L'objectif sera d'augmenter la diversité des contextes dans lesquelles une même notion mathématique est susceptible d'apparaître.

Les conceptions intuitives ont été largement documentées par la recherche depuis une cinquantaine d'années. Par exemple, pour le signe « = », il s'agit de la conception « processus-produit », selon laquelle ce signe « = » sépare un processus de son résultat (Behr, Erlwanger, & Nichols, 1980). Contrairement à la conception du signe « = » comme indicateur d'équivalence entre ce qui est indiqué de part et d'autre du signe, il résulte de cette conception que « $8 = 4 \times 2$ », « $2 \times 6 = 4 \times 3$ » ou « $8 = 8$ » ne vont pas être considérées comme des expressions recevables par certains élèves parce qu'il y a, selon la conception intuitive, inversion du processus et de son résultat dans le premier cas, deux processus indiqués et pas de résultat dans le deuxième cas, et deux résultats dans le dernier (Kieran, 1981). Identifier les conceptions intuitives offre la possibilité à un enseignant de prendre appui sur elles lors de la construction de séquences d'apprentissage. En effet, elles déterminent la représentation initiale la plus probable qu'un élève a d'une notion. Elles orientent la manière dont les élèves sont susceptibles d'interpréter une situation qui leur est proposée en classe. Le fait de les identifier permet de saisir pourquoi une situation particulière pose plus de difficultés qu'une autre et pourquoi les élèves ont tendance à commettre certaines erreurs plutôt que d'autres. Cela rend aussi possible de s'appuyer sur elles pour en dépasser les limites. Il s'agit pour cela d'introduire des situations qui évitent l'ancrage des conceptions intuitives et qui favorisent une évolution des connaissances conceptuelles des élèves.

Indissociable de la notion de conception intuitive, celle de son domaine de validité permet d'identifier les situations susceptibles de poser des difficultés aux élèves. En effet, lorsque le recours à la conception intuitive conduit à la même conclusion que le recours à la conception scolaire, cela signifie que la situation concernée se situe dans le domaine de validité de la conception intuitive. En revanche, les cas où le recours à la conception intuitive conduit à une conclusion différente de celle du recours à la conception mathématique se situent à l'extérieur du domaine de validité. Par exemple l'expression « $4 \times 2 = 8$ » se situe à l'intérieur du domaine de validité de la conception intuitive du signe « = » (séparer un processus, à gauche, du produit de ce processus, à droite) tandis que ce n'est pas le cas pour l'expression « $8 = 4 \times 2$ », qui, selon cette conception intuitive, indique le résultat avant même le processus qui l'a produit, ou « $2 \times 6 = 4 \times 3$ », qui présente deux processus et pas de résultat. De même, comme on le précisera lors de la section suivante (1.2.2), un problème d'addition itérée se situe dans le domaine de validité de la conception intuitive de la multiplication, contrairement, par exemple, au cas d'un problème dans lequel on recherche combien de fois plus il y a dans un ensemble que dans un autre.

Le prisme de la concordance ou de la discordance avec les conceptions intuitives peut ainsi être mobilisé pour analyser les situations scolaires en mathématiques. Le fait de repérer si une situation rencontrée par les élèves se situe ou non dans le domaine de validité de la conception intuitive associée à la notion concernée constitue une indication sur la difficulté pour les élèves. Lorsqu'il y a concordance entre la conclusion à laquelle aboutit la référence et la conception intuitive, la résolution sera facilitée.

De manière plus large, les conceptions intuitives ne concernent pas uniquement les notions scolaires, mais également les scénarios des situations introduites et la simulation mentale (Sander, 2018 ; Rivier, Scheibling-Sève, & Sander, en révision). À chaque fois, il s'agit de repérer dans les situations rencontrées par les élèves des facteurs extra-mathématiques susceptibles de faciliter la résolution lorsque les contextes sont favorables, c'est-à-dire en cas de concordance, et d'y faire obstacle lorsqu'ils sont défavorables, c'est-à-dire en cas de discordance.

En ce qui concerne le scénario rencontré, il s'agit de repérer si les éléments de contenu de la situation (les objets, les relations qui lient ces objets), orientent vers les opérations qui mènent à la solution (concordance) ou non (discordance). De nombreux travaux ont montré que la situation décrite conduit à la construction d'une représentation mentale de l'énoncé, induite par ses éléments les plus concrets, qui va, à bon ou à mauvais escient, susciter une stratégie de résolution plutôt qu'une autre. Par exemple, s'il est demandé d'inventer des problèmes où les entités appartiennent à une même catégorie générique, par exemple des pommes et des oranges relativement à la catégorie « fruits », des problèmes d'addition ou de soustraction tels que « combien de fruits en tout ? » vont quasi exclusivement être proposés. En revanche, si les entités sont liées par des relations fonctionnelles de contenance telles que des pommes et des paniers, ce sont cette fois des problèmes de multiplication ou de division qui seront élaborés, par exemple « combien de pommes dans chaque panier ? » (Bassok, Chase, & Martin, 1998). En cas de concordance, le scénario facilite le choix d'une stratégie réussie, alors que la discordance fait obstruction. Si les élèves rencontrent uniquement des scénarios favorables le risque est d'être démunis dès lors que le scénario introduit cessera d'être inducteur de stratégies de résolution appropriées. Il est pourtant pleinement dans les attendus de l'école primaire que les élèves soient en mesure de résoudre un problème tel que « Combien y a-t-il de fois de plus d'oranges que de pommes ? » qui repose sur le choix d'une division dans un scénario faisant intervenir des éléments d'une même catégorie, ce qui souligne l'importance de travailler aussi en classe de tels contextes discordants.

Pour ce qui est de la simulation mentale, il a été montré que les élèves privilégient des stratégies qualifiées d'informelles lorsqu'elles mènent à la réussite. De telles stratégies informelles sont observées avant l'entrée au CP et ne cessent pas avec l'étude des opérations arithmétiques à l'école primaire. Il serait d'ailleurs infondé de décourager leur usage, car il s'agit d'un signe que l'intuition de l'élève lui permet d'atteindre la solution. En revanche, il est important de dissocier les situations pour lesquelles une simulation mentale mène à la solution sans faire appel à la notion visée, de celles pour lesquelles cette résolution directe n'est pas possible et nécessite pour l'élève de mobiliser la notion en question. Par exemple, en CE1, le problème « Combien y a-t-il d'images dans 4 paquets de 10 images ? » est réussi par une majorité d'élèves tandis que le problème « Combien y a-t-il d'images dans 10 paquets de 4 images ? » est deux fois moins bien réussi alors même qu'il repose sur la même opération de multiplication (Brissiaud & Sander, 2010). La raison en est que beaucoup d'élèves résolvent le premier problème en additionnant 4 fois la valeur 10, ce qui amène à la solution assez aisément. En revanche, la même stratégie conduit, pour le second problème, à tenter d'additionner 10 fois la valeur 4, ce qui est nettement plus périlleux et bien moins susceptible de mener à la solution.

Il est important de travailler en classe tout à la fois des situations concordantes, avec les intuitions premières, avec des scénarios aidant et pour lesquelles les stratégies informelles mènent à la solution, ainsi que des situations discordantes, pour lesquelles ces intuitions ne sont pas suffisantes. Cela favorise le développement des connaissances conceptuelles de l'élève et lui donne la possibilité de décontextualiser les situations d'application des connaissances procédurales acquises et de développer les expertises adaptatives nécessaires pour faire face aux situations rencontrées ultérieurement dans sa scolarité (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009).

1.2.2 Les conceptions intuitives des opérations arithmétiques

Concernant l'addition, la conception intuitive est celle de l'ajout (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Núñez, 2000 ; Usiskin, 2008). Selon cette conception, les situations d'addition sont celles pour lesquelles deux parties sont réunies pour former un tout, par exemple « Léa a 3 billes. Théa a

5 billes. Combien ont-elles de billes à elles deux ? », ou celles pour lesquelles une valeur initiale est donnée, ainsi que la valeur d'un accroissement, avec la question portant sur la valeur finale, par exemple « Léa a 3 billes. Elle gagne 5 billes à la récréation. Combien de billes Léa a-t-elle après la récréation ? ». Un problème qui porte sur la recherche de la valeur de départ dans un contexte de perte, par exemple « Léa avait des billes. Elle en perd 3 à la récréation. Il lui reste 5 billes. Combien de billes Léa avait-elle avant la récréation ? » se situe hors du domaine de validité de la conception intuitive de l'addition, de même qu'un problème de comparaison, par exemple « Léa a 3 billes. Théa a 5 billes de plus que Léa. Combien Théa a-t-elle de billes ? ». Autant les énoncés tels que les deux premiers sont réussis par la quasi-totalité des élèves d'une classe dès le CP, autant les deux derniers résistent bien plus tardivement. On note en particulier que le mot « de plus » présent dans certains problèmes de comparaison ne suffit pas à lui seul pour provoquer l'usage de l'addition par les élèves.

La conception intuitive de la soustraction (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Núñez, 2000) est celle de la recherche de la quantité subsistante, connaissant la valeur initiale et la quantité perdue, typiquement, « Léa a 8 billes. Elle en perd 5. Combien lui reste-t-il de billes ? ». À l'inverse, des problèmes pour lesquels il s'agit par exemple de trouver combien a été gagné, tel que « Léa avait 3 billes. Elle en gagne. Maintenant elle en a 8. Combien de billes Léa a-t-elle gagnées ? », ou de comparer, comme « Léa a 8 billes. Théa a 3 billes. Combien Théa a-t-elle de billes de moins que Léa ? », sont hors du domaine de validité de la conception intuitive et nettement plus difficiles pour les élèves. Notons que ce n'est pas simplement le fait de mettre en scène une situation de perte qui correspond à la conception intuitive de la soustraction mais bien la recherche de la quantité restante. Ainsi, l'énoncé « Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? » proposé en France par la DEPP auprès d'élèves de CE2 donne lieu à seulement un quart de réussites. Bien qu'il s'agisse d'un contexte de diminution, où des coureurs abandonnent, cette situation sort du domaine de validité de la conception intuitive de la soustraction car la question porte sur la quantité enlevée alors que c'est la valeur du reste qui est connue.

Concernant la multiplication, la conception intuitive est celle d'une réplication, avec ajouts successifs de la valeur associée à chacune des répliques, ce qui correspond à une addition itérée (Bell, Swan, & Taylor, 1981 ; Fischbein, 1989). Un problème typique de la sorte est « Léo a 3 paquets de 10 gâteaux. Combien Léo a-t-il de gâteaux ? ». Près de 80 % des élèves de CM1 répondent par exemple correctement à la question « Le prix d'une place de cirque est de 8 euros. Quel est le prix de 4 places » (DEPP, 2022). Cette conception intuitive de l'addition répétée a toutefois des conséquences problématiques pour les apprentissages. Tout d'abord, elle rend difficilement acceptable la commutativité de la multiplication, puisque l'idée ne va pas de soi qu'ajouter un certain nombre de fois une certaine valeur aboutisse au même résultat que l'ajout successif de l'autre valeur l'autre nombre de fois (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985). Comment se fait-il que « 3 × 5 » = « 5 × 3 », autrement dit selon la conception intuitive que « 5 + 5 + 5 » = « 3 + 3 + 3 + 3 + 3 » ? Elle induit aussi l'idée, conforme à la signification extra-mathématique du terme « multiplier », que toute multiplication rend le nombre plus grand, dans la mesure où une certaine valeur est additionnée plusieurs fois. Elle conduit aussi à ne pas envisager la possibilité de multiplier deux nombres dont aucun ne serait un nombre entier. Elle rend difficile d'associer à la multiplication des situations qui ne peuvent être résolues par des additions itérées. Par exemple, il a été montré que seule une minorité d'élèves de collège résolvait par une multiplication un problème dans lequel on connaîtrait le prix unitaire et on chercherait le coût d'une quantité inférieure à 1, par exemple, « un kilo de tomates coûte 2,27 euros, combien coûtent 0,22 kilos de tomates ? » (Bell, Swan, & Taylor, 1981). Finalement, elle exclut de nombreux scénarios de multiplication tels que le calcul d'une distance parcourue, de la surface d'un rectangle, un rapport entre quantités : « Combien y a-t-il de fois de plus ? », ou encore le produit cartésien comme dans l'exemple : « Mehdi a 3 tee-shirts et 2 pantalons. Combien de tenues différentes Mehdi peut-il créer ? ».

Pour la division, la conception intuitive est celle du partage équitable (Fischbein, 1987 ; Lakoff & Núñez, 2000) – qualifié aussi de division-partition – dans une situation où la quantité totale est connue ainsi que le nombre de parts et que la question porte sur la quantité reçue par chacun, c'est-à-dire la taille de chaque part, par exemple « 20 bonbons sont partagés équitablement entre 5 amis. Combien de bonbons chaque ami va-t-il recevoir ? ». Ces situations conduisent à un résultat dans la même unité que la valeur initiale. Une telle conception occulte les scénarios de division-quotition dans lesquels la recherche porte sur le nombre de fois qu'une valeur se trouve dans une autre (par exemple « 20 bonbons sont répartis en sachets de 5 bonbons. Combien de sachets va-t-on remplir ? »). Le fait que les situations de quotition se résolvent par des divisions ne va pas de soi et nécessite d'être travaillé. Ainsi, les résultats de l'enquête TIMMS 2019 indiquent que seuls 38 % des élèves de CM1 en France choisissent la division parmi les 4 opérations pour résoudre le problème suivant : « Céline distribue 48 autocollants. Elle en offre le même nombre à 4 amis. Quelle opération donne le donne le nombre d'autocollants que Céline offre à chaque ami ? » (DEPP, 2022). La conception intuitive de la division conduit à penser que diviser rend le nombre plus petit. Alors que des situations très concrètes existent telles que « Combien de verres de 0,23 l peut-on remplir avec une bouteille de 2 l ? »), la quasi-totalité des élèves de 6ème/5ème et une grande partie des adultes échouent à imaginer une situation de division « qui rend plus grand » (Sander, 2018).

1.2.3 Les conceptions intuitives des fractions

Pour les fractions, il s'agit d'une structure bipartite (DeWolf, Grounds, Bassok, & Holyoak, 2014 ; Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015), composée de deux nombres entiers. Cette conception est renforcée par l'utilisation d'exemples pédagogiques qui alignent la forme a/b sur des exemples de type parties/tout comme dans un scénario de parts de pizza (DeWolf, Rapp, Bassok, & Holyoak, 2014). Les fractions sont donc le plus souvent utilisées avec des quantités discrètes. Le numérateur et le dénominateur sont de mêmes unités, comme pour les parts de pizza. Ainsi, on retrouve chez les étudiants une préférence pour représenter les fractions sous forme de diagramme discret plutôt que continu (Rapp, Bassok, DeWolf, & Holyoak, 2015). En conséquence de cette structure bipartite, la fraction est vue comme une division de deux nombres (a/b, c'est a divisé par b) et non comme un nombre, une grandeur (Bonato, Fabbri, Umilta, & Zorzi, 2007). De la conception intuitive de fraction comme structure bipartite découle des stratégies erronées dans le cas de l'addition de fractions par exemple. Ainsi, dans un énoncé comme celui de TIMMS (2011) – Tom a mangé 1/2 d'un gâteau. Et Jeanne a mangé 1/4 d'un gâteau. A eux deux, quelle fraction du gâteau ont-ils mangé ? – la stratégie intuitive est celle d'additionner indépendamment les numérateurs et les dénominateurs (soit 2/6). Une réponse correcte au problème traduit le fait que l'élève a soit mis en œuvre les techniques opératoires pour additionner les fractions, ce qui n'est pas encore au programme à cet âge dans de nombreux pays notamment en France où il s'agit d'élèves de CM1, soit a réussi à se représenter mentalement la fraction comme quantité (la moitié + le quart donne les trois quarts). Or on constate que le taux de réussite est faible (23 %) au niveau international[2].

Un obstacle particulier pour comprendre les fractions découle de l'analogie entre nombres naturels et nombres rationnels. Cela conduit à une tendance à appliquer les propriétés des nombres entiers aux fractions. On parle alors de biais pour les nombres entiers (*whole number bias*, Ni & Zhou, 2005). De cette conception intuitive découlent différentes difficultés. Les élèves ont ainsi tendance à penser que les nombres rationnels, comme les nombres entiers, ont un unique successeur et non pas une infinité de successeurs (Siegler & Lortie-Forgues, 2015 ; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Cette assimilation avec les nombres naturels conduit aussi les élèves à penser que plus le numérateur, ou le dénominateur, ou les deux, sont grands, plus la fraction est grande (Ni & Zhou, 2005). Ainsi, respectivement 41 % et 44 % des élèves de l'enquête TIMMS 2019 ont estimés que 1/3 et 3/10 étaient supérieurs à 1/2 (DEPP, 2022). Cela montre l'importance, parmi les 58 % et 59 %

2 La France ne participait pas à TIMMS en 2011

d'élèves qui répondent (à juste titre cette fois) que 5/6 ou 7/12 sont supérieurs à 1/2, de distinguer les réponses issues de l'influence de la conception bipartite de celles qui s'appuient sur une authentique compréhension des quantités associées aux fractions. De même, par analogie avec les nombres entiers, il est fréquent de conclure que multiplier deux fractions rend nécessairement plus grand, et que diviser deux fractions rend nécessairement plus petit (Siegler & Lortie-Forgues, 2015). Un enjeu de l'enseignement des fractions, comme cela sera développé dans ce texte (3.3), est donc de favoriser la compréhension de la fraction comme une grandeur.

1.3 Du codage spontané au recodage pour aller au-delà des limites des conceptions intuitives

1.3.1 Le codage des situations

Les activités en classe ne sont pas intériorisées par les élèves comme de simples copies internalisées des situations décrites. Toute situation rencontrée fait l'objet d'un codage plus ou moins pertinent sur le plan mathématique. En effet, toute situation est codée sur la base d'indices, souvent non conscients, à savoir les propriétés qui, du point de vue de la personne qui résout, sont perçues comme structurantes. Ce processus, largement implicite, va organiser la représentation mentale d'une situation, et, de la, biaiser la stratégie de résolution. Prenons l'exemple de l'énoncé « Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos. Combien de stylos achète-t-elle en tout ? », que l'on se contraint à résoudre par une addition. La solution qui vient à l'esprit est systématiquement 3 + 3 + 3 + 3 + 3. Cela indique que le codage de la situation a conduit à imaginer une addition itérée dans laquelle chaque enfant reçoit 3 stylos. En règle générale, un codage peut être plus ou moins favorable à une stratégie de résolution. Ainsi, dans l'exemple précédent, le calcul est d'autant plus long que le nombre d'enfants est élevé, ce qui peut le rendre difficile.

Le codage adopté sera déterminant pour rendre ou non une stratégie de résolution accessible et ce, même pour des problèmes qui partagent une même structure mathématique. La recherche a amplement montré comment l'« habillage » d'un problème peut radicalement modifier la difficulté de sa résolution (De Corte, Verschaffel, & De Win, 1985 ; Vicente, Orrantia, & Verschaffel, 2007). En effet, le codage se fait par rapport au contenu de l'énoncé. Par exemple un énoncé de problème dans lequel il est fait mention de fleurs et de vases, ou de pommes et de paniers, ou encore de billes et de sacs, fera certainement intervenir la relation « contenu – contenant » parmi les dimensions de codage, ce qui se prête à une stratégie de résolution faisant intervenir une multiplication ou une division (1.2.1). En revanche un énoncé de problème faisant intervenir des tulipes et des roses, des pommes et des oranges, ou des billes bleues et des billes rouges fera intervenir parmi les dimensions de codage la relation d'appartenance à une même catégorie, en l'occurrence les catégories fleurs, fruits et billes respectivement, ce qui se prête à une stratégie de résolution faisant intervenir une addition ou une soustraction, comme discuté également ci-dessus (1.2.1). De ce fait, les codages spontanés faciliteront les résolutions de problèmes comme « Combien y a-t-il de pommes par panier ? » ou « Combien y a-t-il de pommes de plus que d'oranges ? », mais poseront difficulté lorsqu'il s'agit par exemple de chercher « Combien y a-t-il de fois de plus de pommes que d'oranges ? ».

1.3.2 Les apports du recodage

Pour donner les moyens de dépasser une première compréhension, intuitive, fondée sur les seuls codages initiaux, des activités de recodage peuvent être extrêmement fécondes. Elles peuvent favoriser le développement d'une conception plus abstraite d'une notion mathématique, moins dépendante de propriétés extra-mathématiques, comme l'existence d'une relation de contenu à contenant entre les entités présentes dans la situation. Un recodage consiste à attribuer à une situation des propriétés qui sont aisément attribuées dans certains contextes mais atypiques pour ce contexte particulier. Il s'agit d'un changement de point de vue soutenant un cheminement vers l'abstraction car il favorise une décontextualisation des situations pour lesquelles certaines propriétés peuvent être attribuées en élargissant les cas de figure envisageables. Pour reprendre l'exemple de la question « Combien y-a-t-il de pommes par panier ? », la relation contenu-contenant soutient un scénario de répartition de pommes dans des paniers qui rend accessible l'opération de division. En revanche, la question « Combien y a-t-il de pommes pour chaque orange ? » n'offre pas cette possibilité de prime abord, sauf à considérer que la répartition se fait non pas par panier mais par orange, autrement dit qu'un même groupe de pommes est assigné à chaque orange. Ce type de processus est une forme de changement conceptuel, car sa réalisation ne consiste pas en un simple enrichissement de la représentation initiale (Vosniadou & Verschaffel, 2004). Le recodage pourrait être d'une grande importance dans les apprentissages mathématiques, car l'accès à une représentation différente et l'utilisation des connaissances arithmétiques qui y sont associées, ouvrent la voie à une expertise adaptative consistant en la mise en œuvre de stratégies de résolution appropriée à la situation rencontrée.

Revenons à l'énoncé précédent d'achat de stylos dans la librairie. Le codage qui conduit à l'opération « 3 + 3 + 3 + 3 + 3 » aboutit à une addition d'autant plus longue qu'il y a d'enfants. Modifions à présent l'énoncé pour préciser la couleur de chaque stylo : « Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos, un rouge, un bleu et un vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ? ». L'attribution d'une couleur aux stylos rend plus facilement accessible un codage alternatif de cette situation, car au lieu d'additionner le nombre de chaque sorte de stylos par enfant (3 + 3 + 3 + 3 + 3), il devient plus aisé d'imaginer l'addition du nombre d'enfants par sorte de stylos (5 + 5 + 5). S'il y a beaucoup d'enfants et peu de sortes de stylos, le nombre de calculs en est d'autant réduit. Cet exemple est loin d'être anodin. En effet, considérons maintenant l'énoncé « Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ? ». Cet énoncé ouvre la voie à deux principales stratégies distinctes, qui reposent sur la distributivité de la multiplication sur l'addition : celle de développement (« 5 × 3 + 5 × 6 + 5 × 4 ») et celle de factorisation (« 5 × (3 + 6 + 4) »). Ainsi, développement et factorisation n'apparaissent pas simplement comme deux algorithmes concurrents, mais reposent sur deux codages alternatifs d'une même situation qui conduisent à des stratégies distinctes : soit on privilégie le codage par couleur de stylo en procédant à l'addition successive des stylos de chaque couleur, ce qui correspond à un développement (« 5 × 3 + 5 × 6 + 5 × 4 »), soit on privilégie le codage par objets en procédant d'abord à l'addition des types de stylo, ce qui correspond à une factorisation (« 5 × (3 + 6 + 4) »). La possibilité d'envisager les deux codages est déterminante pour justifier la possibilité de faire appel à l'une ou l'autre stratégie et donner sens à la distributivité plutôt que la percevoir comme une règle arbitraire. Il est donc essentiel de travailler la diversité des codages possibles et les possibilités de recodage lorsque les différents codages ne sont pas immédiatement accessibles (Gvozdic & Sander, 2020 ; Thevenot & Oakhill, 2005, 2006).

Un enjeu essentiel d'apprentissage est que les élèves ne codent pas les énoncés travaillés en classe selon les seules caractéristiques de l'habillage du problème, ce qui les mettrait en échec dès lors qu'un nouveau problème cesserait de partager les caractéristiques de cet habillage. L'enjeu est donc qu'ils soient aussi en mesure de repérer des propriétés qui sont pertinentes sur le plan mathématique. Une activité explicite de comparaison entre énoncés de problèmes peut soutenir le recodage et favoriser le traitement en profondeur des deux situations et l'extraction de caractéristiques communes pertinentes sur le plan mathématique. Le recodage sémantique peut être réalisé par le biais d'activités en classe qui impliquent la comparaison des stratégies de résolution sur des problèmes présentant des contextes sémantiques différents (Gamo, Sander & Richard, 2010). Dans les recherches qui s'inscrivent dans ce paradigme, il est demandé aux élèves de comparer des situations ou des stratégies afin d'identifier les similitudes ou dissimilitudes entre elles et ainsi acquérir un codage commun et utiliser la stratégie la plus efficace. Ainsi, les différents types de comparaisons pour l'apprentissage de la résolution de problèmes ont des résultats positifs dans la maîtrise des notions étudiées, et peuvent également favoriser le transfert (Rittle-Johnson & Star, 2011 ; Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2017). Il a même été montré que la comparaison des procédures informelles et formelles de résolution améliore la compréhension conceptuelle (Hattikudur, Sidney, & Alibali, 2016).

Outre la comparaison explicite, une direction pour la conception d'interventions pédagogiques favorisant les processus de re-représentation des élèves est celle de l'introduction de problèmes pouvant se résoudre avec plusieurs stratégies distinctes (Scheibling-Sève, Gvozdic, Pasquinelli, & Sander, sous-presse). Les élèves doivent alors adopter les différentes stratégies, favorisant le passage d'une conception à l'autre. Dans une expérimentation menée en milieu écologique auprès de 600 élèves de CM1 et CM2 (Scheibling-Sève et al., sous-presse), les élèves étaient incités à recatégoriser la situation via l'explicitation d'un changement de point de vue. Ils étaient ainsi amenés a adopter plusieurs points de vue sur une même situation. Par exemple, afin de favoriser la maîtrise de la distinction entre structure additive et multiplicative, l'objectif était de dépasser la conception intuitive de comparaison « en plus » pour construire les conceptions valides sur le plan scolaire de comparaison « de plus » et comparaison « fois plus ». Les élèves étaient ainsi amenés à utiliser les points de vue « de plus », « de moins », « fois plus », « fois moins ». Par exemple, deux points de vue peuvent être adoptés sur la phrase : « Jena a 15 billes et Mateo a 5 billes ». En prenant le point de vue de Jena, on peut conclure : « Jena a 3 fois plus de billes que Mateo ». En prenant le point de vue de Mateo, on peut conclure : « Mateo a 3 fois moins de billes que Jena ». Ainsi, les élèves étaient amenés à travailler la réciprocité de la multiplication et de la division qui apparait cruciale dans la construction de la notion de rapport. Un même travail était également réalisé pour distinguer « de plus » et « de moins ». En effet, les élèves opèrent avec difficulté la distinction entre les structures multiplicatives et additives, du fait des conceptions intuitives de l'addition ́itérée pour la multiplication et du partage équitable pour la division (Fischbein, 1989).

Il s'avère donc que les codages des situations déterminent les stratégies envisageables et contraignent les possibilités de transfert. Un codage pertinent sur le plan mathématique est le gage d'une compréhension et d'un transfert d'apprentissage approprié. Un recodage, reposant notamment sur la comparaison explicite entre différentes situations introduites en classe, soutient la construction de codages pertinents et l'apprentissage. Afin de faire évoluer les conceptions intuitives et de favoriser les recodages, il est utile de pouvoir s'appuyer sur des représentations figurées, qui constituent des manières de modéliser les situations mathématiques rencontrées. En effet, il s'agit de pouvoir aller au besoin à l'encontre de l'intuition première, tout en préservant la possibilité d'attribuer du sens à la situation rencontrée. Cela permet de la comprendre, en la représentant dans un nouveau format qui permet de rendre mieux visible la ou les stratégies les plus appropriées pour résoudre les problèmes rencontrés, qui constitue donc un nouveau codage, plus fécond pour réussir la tâche rencontrée.

2. Faire appel aux représentations figurées

2.1 Des représentations pour soutenir et développer la compréhension

Dans cette partie du texte, nous exprimons l'idée selon laquelle un certain type de représentation « figurée » ou « figurative » est inséparable de l'activité mathématique. Faire des mathématiques, c'est utiliser sans cesse des représentations, en tant que productions visibles ou tangibles. Dans cette section 2 de ce texte, le terme de représentation est utilisé uniquement dans ce sens, et non dans celui, fréquent en psychologie des apprentissages, de représentation mentale. La question de l'activité mathématique des élèves et du professeur est donc aussi celle de leur usage des représentations. Plus généralement, lorsque l'on considère les mathématiques pratiquées à l'école, le constat est que les élèves ont tendance à voir « les mathématiques comme une collection de règles et de procédures dont il faut se souvenir » (Richland, Stigler, & Holyoak, 2012). Ainsi, les connaissances mathématiques se trouvent abusivement assimilées à des connaissances procédurales, pour des élèves qui « manquent des concepts fondamentaux dont ils auraient besoin pour raisonner en mathématique » (Ibid.).

Ce constat invite à une certaine prise de conscience du fait que, pour beaucoup de mathématiciens, l'activité mathématique consiste à « penser en mathématiques », ainsi que l'exprime par exemple le mathématicien William P. Thurston dans un article important[3] au sein duquel il décrit le travail mathématique de la manière suivante : « Nous n'essayons pas de respecter quelques quotas abstraits de production : tant de définitions, tant de théorèmes et tant de preuves. La mesure de notre succès est bien plutôt : est-ce que ce que nous faisons permet effectivement aux individus de comprendre des mathématiques, et d'y penser plus clairement et plus efficacement » (Thurston, 1995, p. 9). Dans une telle perspective, le but essentiel de l'activité mathématique, en classe comme pour les mathématiciens, est de *comprendre les mathématiques*, ce qui implique de développer des outils ou des images mentales nouvelles. Les représentations jouent un rôle majeur dans ce processus : devenues familières, internalisées, ces images concrètes soutiennent la pensée abstraite et l'intuition mathématique. Nous argumentons ainsi quant à l'importance de lier d'une certaine manière l'activité mathématique des élèves et du professeur à celle des scientifiques et des mathématiciens, et quant au rôle essentiel des représentations pour assurer ce lien.

2.1.1 La force des représentations en mathématiques

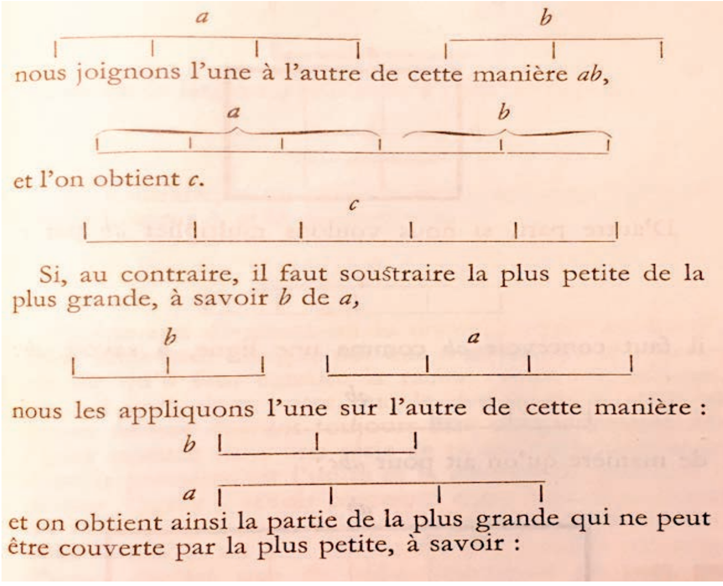
Par *représentation*, nous désignons dans ce texte, « des productions visibles ou tangibles – des diagrammes, lignes numériques, graphes, des arrangements d'objets concrets ou manipulables, des modèles physiques, des mots écrits, des expressions mathématiques, des formules et équations, des images sur l'écran d'un ordinateur ou d'une calculatrice, etc. Ces représentations encodent, symbolisent, ou incarnent des idées ou des relations mathématiques » (Goldin, 2020). Les représentations mathématiques organisent d'une manière spécifique les relations entre abstrait et concret. Avant d'en venir à la question de la multiplication, prenons l'exemple de l'opération d'addition. Il est possible de penser et écrire l'addition des nombres 2 et 4 sous diverses formes, par exemple :

– a/ **d'une écriture mathématique** telle que $6 = 2 + 4$ ou $4 + 2 = 6$;

– b/ **d'un segment sur une ligne numérique** (Bass, 2018 ; Gravemeijer, 1994).

3 Cet article est paru en 1995 aux États-Unis, et a été traduit en France dans la revue *Repères* (https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWR97142.htm), avec des commentaires de Guy Brousseau (http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/11/Notes-%C3%A0-propos-de-larticle-de-Thurston-On-Proof-and-Progress-in-math%C3%A9matics-_1_.pdf).

Notons qu'une telle représentation de l'addition, et plus généralement des structures additives c'est-à-dire des situations où une addition ou une soustraction s'appliquent, est déjà présente chez Descartes, qui écrit dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* (1628-1629, 1973, p. 115, Règle XVIII) : « S'il faut faire une addition ou une soustraction, nous concevons le sujet sous la forme d'une ligne, ou sous la forme d'une grandeur étendue dans laquelle on ne doit considérer que la longueur : car s'il faut ajouter la ligne [on parlerait aujourd'hui de « segment de droite »] a à la ligne b, nous joignons l'une à l'autre de cette manière ab, et l'on obtient c. Si, au contraire, il faut soustraire la plus petite de la plus grande, à savoir b de a, nous les appliquons l'une sur l'autre de cette manière : on obtient ainsi la partie de la plus grande qui peut être couverte par la plus petite. »


nous joignons l'une à l'autre de cette manière *ab*,

et l'on obtient *c*.

Si, au contraire, il faut soustraire la plus petite de la plus grande, à savoir *b* de *a*,

nous les appliquons l'une sur l'autre de cette manière :

et on obtient ainsi la partie de la plus grande qui ne peut être couverte par la plus petite, à savoir :

– d/ **d'un diagramme en boîte** (Fischer, Sander, Sensevy, Vilette, & Richard, 2019) ;

<table><tr><td colspan="2">6</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>

« L'abstrait » de l'idée mathématique d'addition se trouve concrétisé de manière différente dans ces trois représentations. Davydov (2008) parle à ce sujet d'*ascension de l'abstrait au concret*, *ascension* dans la mesure où une signification mathématique, ici l'addition, gagne en puissance dans l'appréhension du réel, et se trouve elle-même mieux appréhendée. En effet, lorsque l'idée d'addition (ici des nombres 2 et 4) est concrétisée dans les trois représentations ci-dessus, elle s'incarne dans une forme spécifique qui permet de la manipuler, de l'étudier, de mieux la comprendre. Ce qui importe n'est donc pas tant le passage à l'abstraction ou le passage à la concrétisation, mais la relation entre abstrait et concret, dans les deux sens (Dreyfus, 2014), et donc à la fois la capacité à abstraire et celle à concrétiser. On peut considérer le travail des représentations comme visant à développer ensemble ces deux capacités, dans tous les domaines des mathématiques, et notamment dans la résolution de problème (cf. les guides du MEN, 2021, 2022 : *Résolution de problèmes au collège* ; *Résolution de problèmes au cours moyen*).

2.1.2 Ce que produisent les représentations

Les représentations se caractérisent précisément parce qu'elles permettent de concevoir l'idée ou la relation mathématique d'une manière spécifique, et donc d'agir, dans le travail mathématique, d'une manière spécifique. Reprenons l'exemple ci-dessus : écrire 6 = 2 + 4, c'est représenter symboliquement l'addition d'une manière qui peut rendre saillantes certaines de ses propriétés.

Par exemple, il sera possible de « décomposer » cette écriture en écrivant 6 = 2 + 3 + 1, ou encore de la « complexifier », en écrivant par exemple 6 + **4** = 2 + 3 + 1 + **4**. De la même manière, écrire 32 = 8 × 4 peut permettre d'écrire 32 = 8 × 2 × 2.

Si maintenant l'addition est représentée sous la forme d'un segment sur la ligne numérique, ce format permettra d'appréhender, directement, que la « mesure 4 » est le double de la « mesure 2 », et que la « mesure 6 » est le triple de la « mesure 2 ». Si enfin l'addition est représentée sous la forme d'un « diagramme en boîte » non proportionnel, on « perdra » l'analogie de la mesure puisque, par exemple, la case « 4 » n'est alors pas nécessairement deux fois plus grande que la case « 2 », mais un tel format de représentation mettra l'emphase sur un codage de deux parties formant un tout. De manière analogue, il est possible de représenter la multiplication 32 = 8 × 4 sur la ligne numérique, mais il est également possible de le faire en deux dimensions, sous la forme d'un rectangle de 8 rangées de 4, comme cela sera développé ci-dessous.

Selon le format de représentation adopté, de nouveaux phénomènes numériques, des propriétés de l'expression mathématique auparavant « dissimulées » seront à chaque fois rendues saillantes. Les exemples qui précèdent concrétisent la définition de la notion de représentation proposée par Brousseau : « Une représentation consiste donc en l'utilisation d'un univers représentant, pour y accomplir une action *a priori* directement impossible dans un univers représenté, afin de pouvoir, par la suite, ramener dans ce dernier le résultat de cette action. » (Brousseau, 2004, p. 149).

Afin de concrétiser cette définition, précisons que dans l'addition précédente, il est ainsi possible de partir de l'écriture mathématique 6 = 2 + 4, que l'on cherche à *représenter* ; cette écriture est donc le « représenté », produit dans « l'univers représenté ». Cette même écriture peut être représentée par une addition de segments sur la ligne numérique : les segments constituent alors le « représentant », produit dans « l'univers représentant ». Utiliser la représentation sur la ligne numérique, rend visible et aide à comprendre que, par exemple, 4 est le double de 2 et que 6 est le triple de 2. Il sera alors possible de ramener dans l'univers « représenté » (l'écriture mathématique) le produit de cette compréhension, en écrivant par exemple que 3 × 2 = 2 × 2 + 1 × 2.

De même, il sera possible de considérer un rectangle de longueur 8 et de largeur 4, et donc de surface 32, comme le représentant de l'écriture 32 = 8 × 4 (le représenté). Le rectangle « dessiné » *représentera* l'écriture mathématique 32 = 8 × 4. De la même manière, l'utilisation du nombre rectangle, développée ci-dessous, permet de représenter et de comprendre en faisant simplement pivoter ce même rectangle que 32 est aussi égal à 4 × 8. On aura ainsi ramené dans l'univers représenté (l'écriture mathématique), le résultat de l'action produite dans l'univers représentant (le pivotement du rectangle), en écrivant par exemple que 32 = 8 × 4 = 4 × 8.

2.1.3 La traduction entre représentations

Dans de nombreux cas, l'activité mathématique peut être considérée comme une opération de *traduction* entre différentes représentations d'un même énoncé (cf. McNeil & Fyfe, 2021 ; Fyfe, McNeil, Son, & Goldstone, 2014, Ding & Li, 2014). Cette traduction consiste en l'élaboration de stratégies qui consistent à produire d'abord une première représentation d'une relation mathématique – l'écriture mathématique 32 = 8 × 4 dans l'exemple précédent –, qui permet de comprendre cette relation d'une certaine manière, par exemple que 32 correspond à 8 groupes de 4, et donc de pouvoir agir sur elle en utilisant les propriétés associées à cette compréhension.

Dans un second temps, cette représentation est traduite dans une autre représentation – par exemple l'usage d'un rectangle de 8 rangées de 4 –, ce qui rend possible de réaliser d'autres actions, fondées sur d'autres propriétés. On peut faire tourner le rectangle, par exemple, ce qui rend *visible* que 8 groupes de 4 et 4 groupes de 8 correspondent à la même quantité. D'autres manipulations permettront de voir au sens littéral, que 8 groupes de 4 peuvent être « décomposés », par distributivité, en 6 groupes de 4 et 2 groupes de 4.

2.1.4 Représentations, analogie, et modélisation

Dans l'activité humaine en général et l'activité mathématique en particulier, l'analogie a un rôle majeur (Gray & Holyoak, 2021 ; Hofstadter & Sander, 2013 ; Holyoak & Thagard, 1997). Les représentations peuvent fonctionner comme favorisant l'analogie, comme des « opérateurs d'analogie », en particulier parce qu'elles permettent de modéliser différentes situations qui peuvent se concevoir comme relevant de la même structure mathématique. Ainsi, la représentation sur la ligne numérique permet de modéliser une variété de situations diverses telles que la juxtaposition d'un bâton de 4 m de longueur à un bâton de 2 m de longueur, ou la mise en commun d'une somme de 4 euros et d'une somme de 2 euros. Elle favorise la compréhension par les élèves que cette diversité de situation peut être ramenée à une même représentation. De même, un nombre-rectangle, tel qu'introduit ci-dessous, peut unir sous un même format de représentation une diversité de situations (cf. *La résolution de problèmes au cours moyen* et *La résolution de problèmes au collège* pour de nombreux exemples), rendant saillant en quoi ces situations sont analogues sur le plan mathématique.

L'analogie sous-jacente à la diversité des situations représentées est traduite par le codage sur la ligne numérique ou avec le nombre rectangle, qui conduit à une modélisation de ces situations. D'une manière générale, donc, les représentations peuvent symboliser des états et des relations. C'est un aspect essentiel de l'activité scientifique en général, et mathématique en particulier (Coopmans, Vertesi, Lynch, & Woolgar, 2014; Lynch & Woolgar, 1990) que d'utiliser des représentations pour modéliser. Une part importante de l'activité mathématique en classe peut donc se centrer sur l'enseignement de « méthodes de représentation efficaces pour modéliser » (*La résolution de problèmes au cours moyen*, p. 107). Dans cette perspective, une représentation peut être utilisée à la fois pour modéliser une situation donnée, par exemple un énoncé de problème, mais aussi pour produire des relations qu'elle permet de concevoir.

Ainsi, le diagramme en boîte précédemment évoqué peut-il être considéré de deux manières. Il est possible d'une part de considérer qu'il modélise une situation de la vie quotidienne et une question qu'elle pose (par exemple, « Lydia a 4 billes. Haruki a 2 billes. Combien en ont-ils ensemble ?).

<table>
<tr><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>

Ce format fait apparaître la valeur de la totalité et en dessous les valeurs associées à chaque partie. Il est possible d'autre part de le considérer comme une petite machine à écrire des équations. En s'appuyant sur ce diagramme, il sera possible d'écrire par exemple :

$6 = 4 + 2$, mais aussi $2 = 6 - 4$, ou encore $4 = 6 - 2$

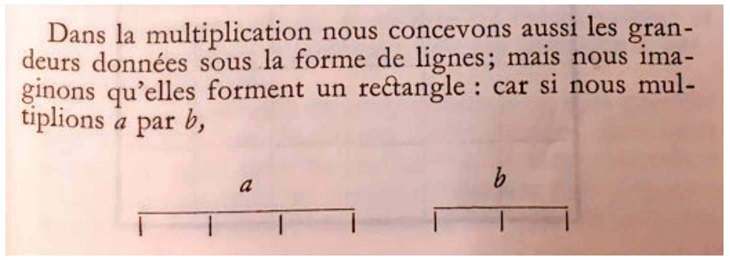
Tel qu'il est pratiqué ici, le passage de la configuration des nombres au sein du diagramme en boîte à un ensemble d'égalités qui en découlent constitue une première forme d'accès à une pensée pré-algébrique, fondée sur la syntaxe des nombres et des relations qui les unissent, ce à quoi réfèrent ces nombres étant mis de côté temporairement. Dans un second temps, toutefois, ces équations, obtenues de manière syntaxique par la manipulation du diagramme en boîte, pourront être pensées comme des modélisations de situations de la vie quotidienne. De même, comme cela est discuté ci-dessous, le nombre rectangle permet non seulement de modéliser de nombreuses situations multiplicatives, souvent contre l'intuition immédiate, mais favorise aussi la production pré-algébrique d'écritures mathématiques, par exemple en rendant visible la distributivité de la multiplication sur l'addition.

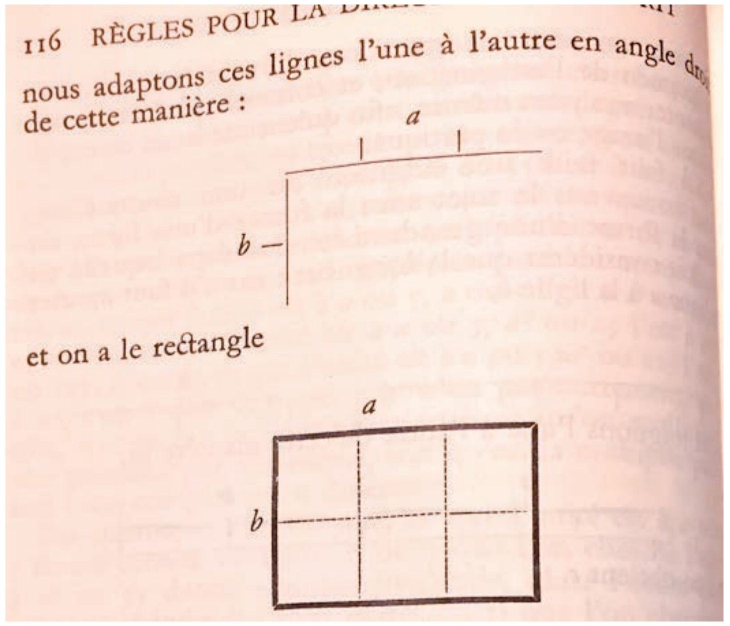
2.2 Le cas du nombre rectangle : une représentation particulière pour favoriser la compréhension de la multiplication

2.2.1 Représenter la multiplication par un nombre rectangle

Parmi les représentations qui permettent de comprendre les nombres et les opérations arithmétiques se trouvent les nombres figurés (cf. par exemple Deza & Deza, 2012), et notamment les nombres rectangles. Comme introduit ci-dessus (1.2.2), la conception intuitive de la multiplication est l'addition itérée, qui conduit par exemple à ce que 3×4 soit compris comme $4 + 4 + 4$. Cette conception selon laquelle $a \times b = b + b + b + b$... « a fois » constitue une compréhension spécifique de la multiplication, qui peut bien se représenter sur la ligne numérique, mais qui peut également faire obstacle dans de nombreuses situations, comme discuté également au 1.2.2. Si les nombres figurés sont classiquement utilisés dans leur format rectangle sous forme de tableaux contenant un point dans chaque case, il est aussi possible que les côtés soient des segments de taille non entière. C'est notamment le cas lorsqu'on a affaire à un produit de nombres décimaux (on ne saisit pas facilement comment on peut appréhender de cette manière 3,2 fois 4,1 par exemple), ou lorsqu'on considère la multiplication par un nombre inférieur à 1. En effet, la conception intuitive de la multiplication comme addition itérée laisse penser que multiplier un nombre b par un nombre quelconque donnera toujours un résultat supérieur à b (alors que par exemple $0{,}5 \times 3 = 1{,}5$; $1{,}5 < 3$, et qu'on voit mal comment donner du sens à l'idée de itérer « une demi-fois »).

Descartes (1628-1629, 1973, p. 115, Règle XVIII), qui considérait, comme nous l'avons vu, l'addition et la soustraction « sous la forme d'une grandeur étendue dans laquelle on ne doit considérer que la longueur », pense la multiplication de la même manière. Il envisage toutefois aussi un autre format, comme cela apparaît lorsqu'il écrit :


Dans la multiplication nous concevons aussi les grandeurs données sous la forme de lignes; mais nous imaginons qu'elles forment un rectangle : car si nous multiplions a par b,


116 RÈGLES POUR LA DIR...

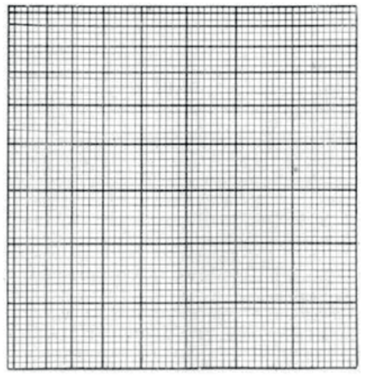
nous adaptons ces lignes l'une à l'autre en angle d...
de cette manière :

et on a le rectangle

Depuis Descartes, on trouve un grand nombre d'exposés de mathématiciens, qui, pour reprendre les propos cartésiens, adaptent les « lignes l'une à l'autre en angle droit ». Il est intéressant à ce sujet de s'arrêter sur la proposition du mathématicien Charles-Ange Laisant (1841-1920), dans son livre *Initiation mathématique* (1907). Après avoir présenté la table de Pythagore :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	64	72	81

Il en propose une autre version :



dont il dit qu'elle « ne fait qu'exécuter graphiquement les opérations qui [dans la table de Pythagore] résultent du calcul ». En effet, on peut « lire » sur la deuxième « version » de la table de Pythagore les nombres représentés sous la forme de rectangles. Par exemple, la première ligne juxtapose des rectangles d'aire 1, 2, 3, etc. la deuxième ligne des rectangles d'aire 2, 4, 6, etc. Et on lit « directement », c'est-à-dire graphiquement, sur cette deuxième « version » que 2 × 2 = 4, 2 × 3 = 6, etc.

Une telle représentation a pu être utilisée au sein d'une recherche récente (Maffia & Mariotti, 2020) pour travailler avec des élèves de CE1 la distributivité de la multiplication sur l'addition.

2.2.2 Quels apports de l'usage du nombre rectangle pour représenter la multiplication ?

Cette conception de la multiplication fondée sur la représentation-rectangle présente de nombreux intérêts (les guides du MEN, 2021, 2022, *La résolution de problèmes au collège* et *La résolution de problème au cours moyen*). D'une manière plus générale, la représentation rectangle de la multiplication permet cette « ascension » de l'abstrait au concret évoquée ci-dessus. Ce qui n'était pas directement visible dans l'écriture en ligne d'une multiplication, par exemple la commutativité de l'opération, ou ses propriétés de distributivité, devient évident dans la représentation rectangle. Dans ce cas aussi, la traduction entre représentations pourra être efficace, non seulement dans le sens de l'écriture mathématique à la représentation rectangle, mais aussi dans le sens inverse, qui consiste à représenter un rectangle, « pavé » par des rectangles de dimensions variées, par une écriture mathématique adéquate (2.2.3).

On peut lister rapidement quelques-uns des intérêts de la représentation sous forme de nombres rectangles :

- a) Elle permet de représenter la multiplication des décimaux dans la mesure où rien n'impose que les côtés des rectangles aient des valeurs entières (nous ne parlons pas ici des tables de Laisant mentionnées ci-dessus, mais de rectangles ayant pour longueur des côtés les valeurs dont on cherche à calculer le produit).
- b) Elle donne à voir que le résultat de la multiplication d'un nombre b par un nombre inférieur à 1 est inférieur à b dans la mesure où la valeur de l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés est plus petit que 1 est inférieure à la valeur de la longueur de l'autre côté de ce rectangle.
- c) Comme précisé plus haut, elle figure aussi presque immédiatement la commutativité de la multiplication. Il suffit en effet de faire pivoter mentalement ou matériellement un rectangle de 4 × 3 pour constater qu'on peut le voir aussi comme un rectangle de 3 × 4.
- d) Elle exemplifie de multiples façons la distributivité de la multiplication sur l'addition, puisqu'elle permet de « tracer », par exemple sur un rectangle de 5 × 7, un rectangle de 2 × 7 et un rectangle de 3 × 7, ce qui permettra de comprendre qu'on peut écrire 5 × 7 = 2 × 7 + 3 × 7.
- e) Elle donne à voir de manière assez explicite la relation inverse entre multiplication et division. Un rectangle peut ainsi servir de base à la production d'écritures divisives, dans leurs relations avec les écritures multiplicatives correspondantes (par exemple, 32 = 8 × 4, c'est d'un certain point de vue « la même chose » que 32 : 8 = 4, qu'on « voit » sur le rectangle) et aux situations de divisions que ces écritures peuvent modéliser.
- f) Elle permet de représenter tout nombre sous la forme d'un rectangle (les nombres premiers ne pouvant être figurés que par un seul rectangle de largeur 1).
- g) Elle peut servir de base à un travail intelligent, c'est-à-dire fondé sur les propriétés des nombres, dans l'apprentissage systématique des tables de multiplication (par exemple se servir du fait qu'on connaît 2 × 4 pour calculer 6 × 4).
- h) Elle peut constituer un outil précieux pour la résolution et la création de problèmes, notamment de problèmes à énoncés (*problem posing*, cf. Felmer, Pehkonen, & Kilpatrick, 2016 ; Singer, Ellerton, & Cai, 2015).
- i) Et ainsi de suite : même des théorèmes ou des formules mathématiques assez avancées, telles que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, peuvent être rendus visibles et « évidents » (du latin *videre*, voir) grâce à ce format de représentation. Celui-ci se généralise également à la troisième dimension – les élèves des écoles Montessori, dès le primaire, jouent avec un « cube du binôme », puzzle en bois qui représente, implicitement, le développement $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$.

2.2.3 Quelques exemples d'usage en classe

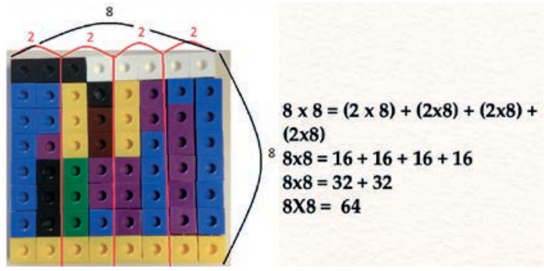
Nous nous appuyons ici sur le travail concret, dans les classes, issu de la coopération entre professeurs et chercheurs au sein d'un LéA (Lieu d'Éducation Associé) à l'Institut Français d'Éducation (IFÉ)[4]. Nous avons restreint les exemples donnés au cycle 2 (CE1), de sorte à montrer des possibilités effectives de travail qui pourront être développées dans les cours et cycles suivants.

Calcul de la multiplication et nombre rectangle

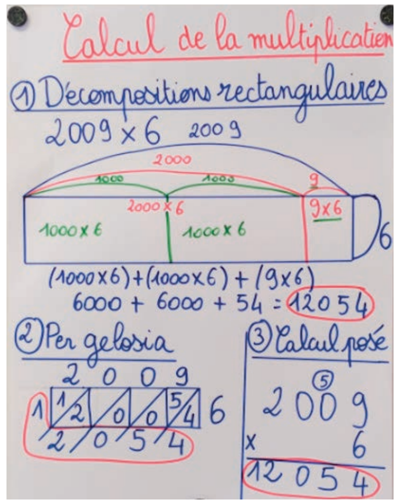
Les exemples ci-dessous montrent comment l'usage des nombres rectangles est d'abord institué dans l'usage d'un matériel. Ce matériel permet, en désignant des collections organisées sous forme

4 Ces exemples ont été fournis et étudiés par Mireille Morellato, Sandrine Jadot, et Angélique Martinotti du LéA Réseau ACE Armorique-Méditerranée http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-ecoles-armorique-mediterranee

de produits, de donner concrètement à voir les produits partiels dont la somme correspond au nombre rectangle. L'écriture mathématique permet ainsi d'abstraire « le concret » des cubes du matériel. En retour, les cubes du matériel permettent de concrétiser « l'abstraction » de l'écriture mathématique.

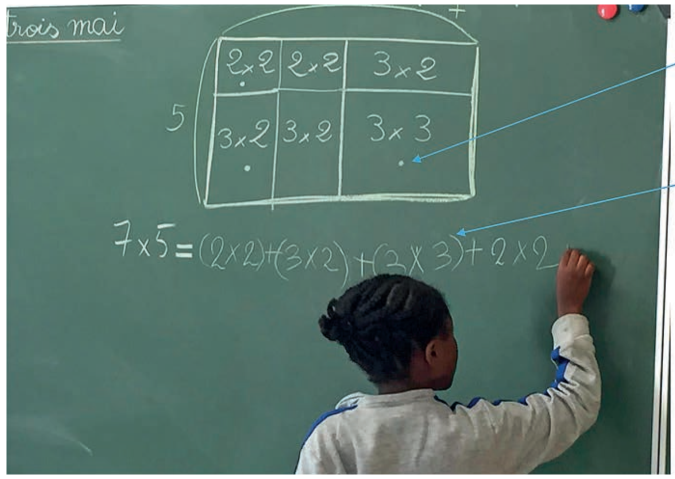


L'exemple ci-dessous montre comment, dans la classe, un affichage résume les relations entre « les décomposions rectangulaires » qui permettent de calculer les multiplications, et d'autres manières d'opérer des multiplications.



L'étude de la distributivité de la multiplication sur l'addition

Les élèves travaillent sur 5 × 7 en représentant des multiplications par un nombre rectangle. La production ci-dessous montre comment le travail du professeur et des élèves, lors de la mise en commun dans la classe, peut permettre de structurer le travail.



Faire pointer les produits écrits au fur et à mesure

Introduire (ou ré-introduire) les parenthèses désignant ici en acte les nombres-rectangles

Les nombres 5 et 7 sont décomposés : 5 en 3 + 2 ; 7 en 2 + 2 + 3. Les produits partiels, à l'intérieur des rectangles, permettent de les désigner par une écriture mathématique. Ces produits partiels sont ensuite repris, sous le rectangle dessiné, sous la forme d'une somme égale à 7 × 5.

Une telle activité met l'accent sur la propriété de distributivité de la multiplication. Elle est complémentaire d'autres activités qui peuvent également être travaillées par le biais de nombres rectangles, comme le fait que 5 × 7 = 35 se décompose en 3 fois 10 et une unité de 5.

Pour éviter oublis et confusions rendus possibles par la complexité du nombre rectangle, le professeur fait pointer les produits écrits au fur et à mesure (flèche supérieure sur le photogramme).

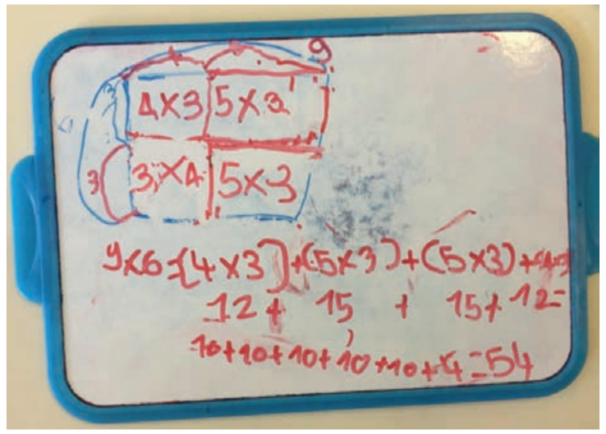
Il institue l'usage des parenthèses pendant l'écriture mathématique, parenthèses qui donnent à voir les produits partiels.

La production suivante montre le travail d'un élève sur 9 × 6. On voit comment l'élève a décomposé 9 et 6, puis écrit les produits partiels désignés à l'intérieur du rectangle, avant d'établir l'écriture mathématique de la multiplication en utilisant les parenthèses pour bien identifier les produits partiels dans leur somme.

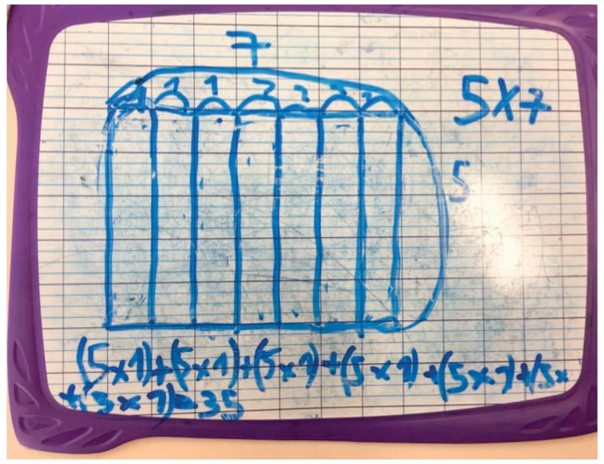
Il a ensuite calculé la somme des produits partiels.

À noter que l'élève écrit 12 + 15 + 15 + 12 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4.

On peut penser que cette égalité a été obtenue grâce à des techniques de composition-décomposition en considérant que : 12 + 15 + 15 + 12 = 10 + 2 + 10 + 5 + 10 + 5 + 10 + 2 = 10 + 10 + 5 + 5 + 10 + 2 + 2 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4.

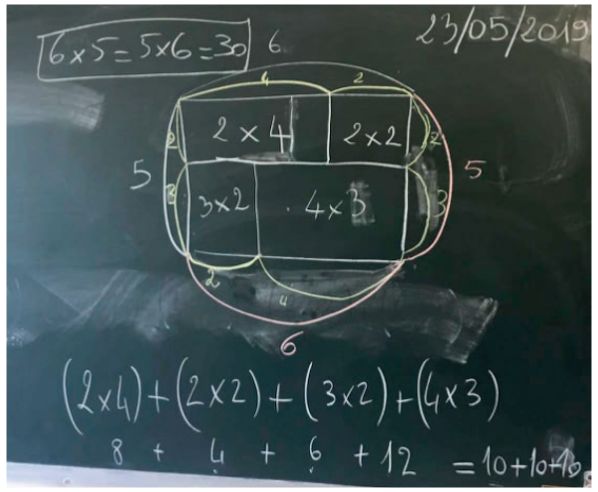


La multiplication 5 × 7 : l'exemple ci-dessous illustre le double intérêt de la décomposition unitaire et de l'usage des parenthèses.



Les élèves peuvent ainsi percevoir comment on peut décomposer 7 en 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, et comment ensuite on obtient le produit de 5 par 7 en «distribuant» 5 sur chacune des unités (5 × 1) + (5 × 1) + ..., etc. Les parenthèses utilisées dans l'écriture sous la figure donnent à voir et à comprendre cette distribution, puisqu'elles permettent de regrouper les produits partiels. Même si elles ne sont pas indispensables sur le plan de l'écriture mathématique proprement dite, leur usage permet ici de structurer la perception et la compréhension des élèves.

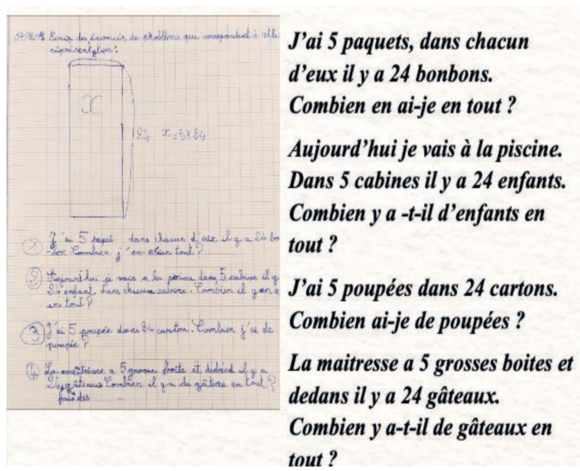
Cette production (6 × 5) continue à rendre compte de la diversité possible dans le travail des élèves.



Ici, l'élève, dont la production a été reprise au tableau lors de la mise en commun du travail dans la classe, a travaillé de manière proche des productions précédentes, mais elle a décomposé différemment 6 sur les deux «lignes» du rectangle. En haut, 4 et 2, en bas, 2 et 4. Ceci lui permet d'obtenir des produits partiels différents, et lors de cette mise en commun dans la classe, les élèves, soutenus par le professeur, peuvent prendre conscience de cette variété et utiliser la même technique dans leur future décomposition, en travaillant par exemple dans le Journal du Nombre[5].

À noter, en haut du tableau à gauche, l'écriture commutative de la multiplication (6 × 5 = 5 × 6 = 30), la commutativité de la multiplication étant rendue très facile à appréhender avec un nombre rectangle.

Résolution-création de problèmes avec les nombres rectangles



Les nombres rectangles peuvent constituer un moyen de représenter des problèmes. L'exemple ci-contre montre comment un élève a travaillé dans son Journal du nombre, à partir de l'incitation «Écris des énoncés de problèmes qui correspondent à cette représentation». Il s'agit ici de la *création de problèmes de multiplication*, élaborés sur la base de l'activité de résolution de problèmes préalables. Seront abordés ensuite, en classe puis dans le Journal du nombre, les problèmes de division, à la fois en *résolution* et en *création* de problèmes.

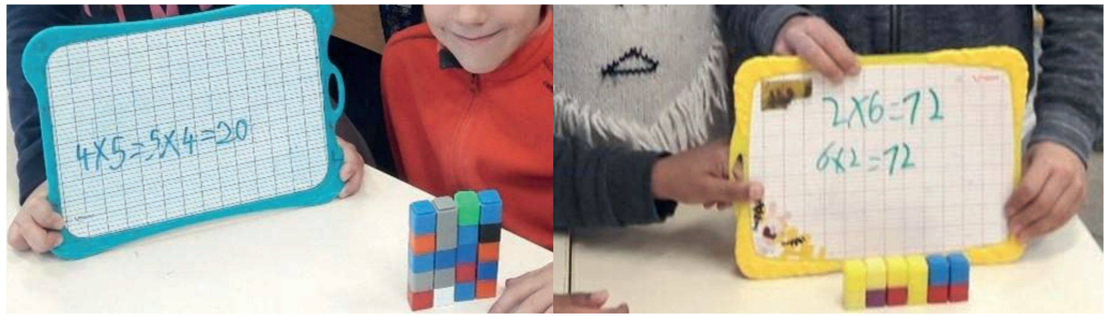
5 Le «journal du nombre» est un cahier dans lequel les élèves écrivent «les mathématiques qu'ils savent». On peut prendre connaissance de l'organisation de ce dispositif dans un module M@gistère : https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=1650&section=1

Sur la figure ci-dessus, les énoncés de problèmes proposés par l'élève ont été recopiés à droite. Ces énoncés, lors de la mise en commun en classe vont faire l'objet d'un travail critique.

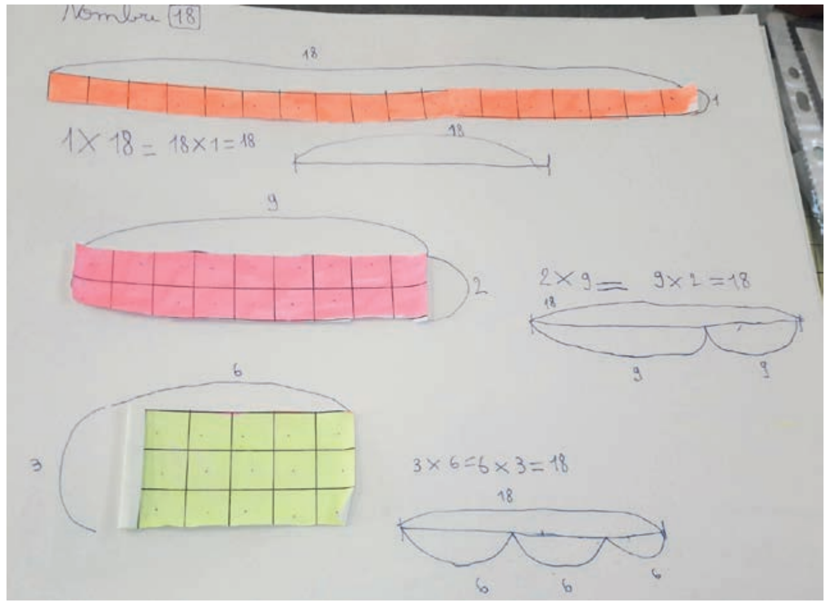
La communication avec les parents d'élèves

Le texte ci-dessous, et ses illustrations, ont constitué un document résumant le travail sur les nombres rectangles dans une classe du LéA Réseau Armorique-Méditerranée, *construit à destination des parents d'élèves*.

«Nous avons commencé à travailler sur le sens de la multiplication. Nous avons appris à désigner une collection d'objets par une multiplication. Pour cela, nous avons organisé cette collection en rectangle. Les enfants ont travaillé par 4 et chaque groupe est venu présenter sa collection organisée ainsi que les écritures mathématiques correspondantes.»



«Nous avons aussi cherché plusieurs façons de représenter une même collection avec des rectangles différents; par exemple, comment représenter une collection de 18 cubes avec des écritures multiplicatives différentes :»



« Puis, nous avons constitué des familles de nombres rectangles : la famille du 5, par exemple, c'est-à-dire tous les nombres rectangles qui ont un côté de 5 … Nous avons ainsi construit ensemble nos tables de multiplication. »

Dialoguer sur la base d'un tel document avec les parents et les élèves permet de faire progressivement comprendre aux parents les possibilités de travail de leurs enfants en classe. Il s'agit de partager avec eux les conceptions sous-jacentes (ici, la multiplication représentée par des nombres rectangles) à l'activité mathématique en classe, ainsi que les instruments concrets de cette activité (par exemple, le tableau de la « famille des nombres rectangles » ci-dessus). Ces instruments pourront ainsi concrétiser le dialogue mathématique, non seulement entre professeurs et élèves, mais entre parents et élèves, et parents, professeurs et élèves.

2.3 Représentations et enquêtes

Plus haut dans ce texte, nous faisions l'hypothèse que l'activité mathématique à l'école gagne à être mise en relation avec l'activité propre des mathématiciens, et que l'usage des représentations peut contribuer à cette mise en relation. Toutefois, la qualité de l'activité mathématique des élèves et du professeur ne dépend pas bien sûr seulement de son contenu mathématique proprement dit, mais également de la *nature* de cette activité.

L'un des éléments essentiels de cette activité concerne la manière dont les élèves étudient les relations entre représentations mathématiques au sein de problèmes, et dont ils parviennent peu à peu à explorer ces relations par eux-mêmes, grâce à l'enseignement du professeur et à la coopération avec les autres élèves. On retrouve ainsi un aspect majeur de l'activité des scientifiques en général et des mathématiciens en particulier, la nécessité de discuter longuement et précisément les « infrastructures », pour reprendre le mot de Thurston (1995), des théorèmes et des preuves issus de l'activité mathématique, afin de les faire comprendre. Dans la classe, il y a donc une nécessité d'enquête, à la fois individuelle et collective, enquête dans laquelle le travail du professeur joue un rôle fondamental.

En accomplissant cette enquête, les élèves peuvent produire des idées mathématiques intéressantes, par exemple, pour ce qui concerne les structures multiplicatives, en mettant en relation une écriture mathématique et une « décomposition » d'un rectangle. Lorsqu'il identifie de telles idées, le professeur peut alors les instituer, au sein du collectif de la classe, comme des exemples emblématiques, exemples dont l'étude des élèves pourra s'inspirer, ainsi que nous le verrons ci-après.

En travaillant de cette manière, la classe agira d'une manière parente d'un collectif scientifique, où, ainsi que l'a montré Thomas Kuhn (1972), des exemples exemplaires de la manière dont les principaux problèmes ont été posés, travaillés et résolus, nourrissent le travail des étudiants comme celui des chercheurs.

Certains dispositifs didactiques, comme le Journal du Nombre peuvent ainsi mettre les élèves en situation, après un enseignement exigeant, de produire des mathématiques et des représentations mathématiques de leur propre mouvement, de dialoguer à leur propos avec le professeur et le collectif de la classe, pour faire avancer leur propre compréhension des mathématiques et celle de la classe. De tels dispositifs peuvent également instituer des exemples particulièrement intéressants de productions d'élèves en exemples emblématiques (potentiels « exemples exemplaires ») dont la classe pourra s'inspirer pour son étude mathématique.

3. Focale sur les aspects conceptuels et procéduraux du champ multiplicatif

Gérard Vergnaud (1988) introduit la notion de champ conceptuel comme « un ensemble de problèmes et de situations dont le traitement implique des concepts, procédures et représentations de plusieurs types en étroite connexion ». Il décrit les grands volets du champ conceptuel multiplicatif en y intégrant multiplication, division, fractions, ratios, nombres rationnels et autres structures multiplicatives plus complexes. À mesure que les élèves avancent, de la plus simple à la plus élaborée de ces structures, ils sont supposés passer progressivement d'une pensée additive à une pensée multiplicative, condition requise pour développer le raisonnement proportionnel. Le raisonnement proportionnel comprend des formes de pensées mathématiques qui se développent dans les dernières années d'école primaire et continuent à s'approfondir au-delà. Il correspond à un certain niveau de maturité qui consolide des idées mathématiques fondamentales et ouvre les portes à une pensée mathématique plus avancée.

La partie de ce texte consacrée à la multiplication et à la division présente les conceptions intuitives qu'ont les élèves de ces opérations dans le prolongement de ce qui a été ébauché précédemment (1.2.2), ainsi que les conceptions dont il serait souhaitable de favoriser le développement pour une meilleure appréhension de la signification de ces notions. Pour chacune des opérations, les aspects procéduraux seront ensuite abordés en complément de ces aspects conceptuels. En d'autres termes, la manière dont les multiplications et divisions sont et pourraient être résolues par les élèves sera décrite. Nous verrons la manière dont les aspects conceptuels et procéduraux liés aux multiplications d'une part et aux divisions d'autre part sont profondément intriqués et difficiles à envisager indépendamment les uns des autres. Dans les différentes parties du texte, des éléments relatifs aux formes d'enseignement et à la manière de favoriser leur portée seront proposés ; des propositions pédagogiques seront formulées dans des parties spécifiques. Précisons que ce texte se focalise sur le calcul mental des multiplications et des divisions : le cas des opérations posées, qui aurait nécessité des développements spécifiques trop importants, n'est pas concerné ici.

La compréhension des fractions débute quant à elle avec des expériences informelles de partition dans la vie quotidienne et se poursuit à l'école élémentaire avec un apprentissage plus formel. Étant donné les difficultés d'apprentissage des élèves dans ce domaine, il paraît important d'identifier les conceptions trompeuses sur les fractions et d'élaborer des approches pédagogiques visant à soutenir le développement de la pensée multiplicative et du raisonnement proportionnel.

3.1 La multiplication

3.1.1 Aspects conceptuels

Comme cela a déjà été abordé plus tôt (1.2.2), la conception intuitive de la multiplication est l'addition itérée. Pourtant d'autres conceptions sont possibles comme une relation de correspondance invariante entre deux quantités (i.e., schéma de correspondance ou rapport entre deux quantités). En comparant les conséquences d'enseignements mettant l'accent sur l'une ou l'autre de ces conceptions de la multiplication, Park et Nunes (2001) constatent que le concept de multiplication est mieux saisi par les élèves en leur faisant travailler le schéma de correspondance plutôt qu'en leur faisant travailler l'addition répétée. Ainsi, des élèves de CE1 résolvent mieux des problèmes à structure multiplicative après avoir étudié la résolution de problèmes sous la forme : « Hier, Tom a mangé 2 fruits à chacun des 3 repas de la journée. Combien Tom a-t-il mangé de fruits hier ? » plutôt que sous la forme : « Hier au petit déjeuner, Tom a mangé 2 bananes, il a mangé 2 poires à midi et 2 clémentines lors du dîner. Combien Tom a-t-il mangé de fruits hier ? ». Les auteurs concluent que la multiplication comme addition répétée doit être envisagée dans les classes uniquement comme une procédure de résolution, limitée cependant aux manipulations sur des nombres entiers, et qu'il ne s'agit pas de la conception la plus souhaitable pour soutenir la compréhension de la multiplication.

Ces résultats contrastent fortement avec une tradition qui reste vive dans laquelle l'addition répétée est considérée comme un moyen privilégié de favoriser l'appréhension du concept de multiplication par les élèves, en cohérence avec leur conception intuitive. Au contraire, Nunes, Bryant, Evans et Bell (2010) avancent que le schéma de correspondance est également acquis intuitivement par les enfants avant l'enseignement scolaire des multiplications. Ce serait donc sur ce schéma informel que la pédagogie aurait le plus intérêt de s'appuyer pour développer l'enseignement du concept de multiplication. La présence d'un tel schéma de correspondance chez des élèves de 5 ans et leur compréhension satisfaisante de ce schéma ont été documentées par Frydman et Bryant (1994). Dans une recherche, il était demandé aux élèves de partager équitablement des gâteaux dont certains faisaient exactement trois fois la taille des autres. La plupart des élèves réussissent à réaliser ce partage équitable en donnant systématiquement 3 petits gâteaux au récipiendaire A à chaque fois qu'un gros gâteau était donné au récipiendaire B. Bien entendu, ces résultats n'impliquent pas que les jeunes élèves reconnaissent consciemment une telle situation comme impliquant un rapport fixe qui relie deux variables ni qu'ils l'associent à l'opération de multiplication. Cependant, faire travailler les élèves dans ce type de contexte pourrait permettre de faciliter les apprentissages scolaires ultérieurs concernant les rapports et les proportions et les lier à la multiplication.

Concevoir le schéma de correspondance comme soubassement principal de la compréhension de la multiplication permet également d'anticiper certaines des difficultés que les élèves risquent de rencontrer lors de l'introduction des nombres décimaux. Rappelons en effet que si l'on s'en tient à la conception de la multiplication comme addition répétée « 4,6 fois la valeur 3,2 » n'est pas compréhensible.

Une manière de favoriser le dépassement du schéma d'addition répétée qui entraverait les élèves dans leur apprentissage est d'introduire des variables continues, qui suscitent plus aisément des représentations fondées sur les rapports. Par exemple, calculer des surfaces de rectangles constitue une activité idéale (Larsson, Pettersson, & Andrews, 2017). De telles activités de mesure favorisent l'appréhension du principe de commutativité de la multiplication. Ce principe est en effet souvent occulté lors de la résolution d'exercices qui impliquent des quantités discrètes, pour lesquels, rappelons-le, la conception de la multiplication comme addition répétée, qui donne un statut différent aux deux termes du produit, rend difficile de saisir la commutativité. Ainsi, si Anne a 3 biscuits dans chacun de ses 4 sacs, il va de soi, pour déterminer le nombre de biscuits qu'Anne possède, d'additionner 4 fois le nombre de biscuits par sac. En revanche, bien que requérant un plus petit nombre d'additions, une stratégie consistant à additionner 3 fois le nombre de sacs serait incompréhensible. Ce type d'énoncé provoque donc un conflit entre la sémantique de la situation décrite et le principe de commutativité. Pour la même raison, les performances d'élèves de CE1 et de CE2 résolvant des problèmes tels que « Combien y a-t-il de biscuits dans 2 paquets de 10 biscuits ? » versus « Combien y a-t-il de biscuits dans 10 paquets de 2 biscuits ? » sont bien meilleures pour le premier énoncé que pour le second bien qu'il s'agisse de la même multiplication. En effet la résolution par une addition répétée du premier énoncé est très simple (10 + 10), et beaucoup plus périlleuse pour le second (2 + 2… + 2, 10 fois) (Brissiaud & Sander, 2010). De manière plus générale, il est intéressant de noter les liens entre la conception que les élèves ont de la multiplication et leur compréhension de ses propriétés (Larsson et al., 2017). Les activités fondées sur les représentations figurées telles que celles s'appuyant sur le nombre rectangle (2.2) ont l'intérêt de rendre visible la commutativité y compris dans des scénarios d'addition répétée tels que ceux de l'énoncé précédent pour lesquels la sémantique de la situation est impuissante à faire saisir les propriétés mathématiques : « 3 biscuits par sac dans 4 sacs » et « 4 biscuits par sac dans 3 sacs » se représentent par le même nombre rectangle.

Enfin, et pour anticiper la transition avec la partie suivante qui traite des aspects plus spécifiquement procéduraux de la multiplication, « entrer » dans cette opération par le schéma de correspondance plutôt que par l'addition répétée aide les élèves à ne pas généraliser abusivement des stratégies spécifiques à l'addition. Il a par exemple été montré que les élèves décomposent parfois les dizaines et les unités dans une multiplication comme ils pourraient le faire pour une addition (ex : 19 × 26 est transformé en 10 × 20 + 9 × 6) ou bien considèrent que si 26 × 21 = 546 alors 27 × 21 = 547 (Larsson et al., 2017).

3.1.2 Aspects procéduraux

Comme cela a été discuté, les élèves recourent le plus fréquemment à l'addition répétée pour résoudre des problèmes simples (ex : 3 × 7 = 7 + 7 + 7). Cette stratégie fréquente en début d'apprentissage peut être associée ensuite à l'utilisation de faits dérivés (ex : 6 × 7 = 6 × 6 + 6). Les élèves peuvent également appliquer des règles comme le fait que multiplier par 0 donne toujours 0 (élément absorbant) ou que multiplier par 1 ne modifie pas le multiplicande (élément neutre). Les élèves peuvent également dérouler des séries mémorisées (ex : 4 × 5 => 5, 10, 15, 20) pour trouver le résultat d'un produit (LeFevre et al., 1996).

Cependant, comme évoqué dans la partie précédente, les stratégies de comptage reposant sur les additions répétées pour résoudre des multiplications trouvent très rapidement leurs limites tant conceptuelles que procédurales. Sur le plan procédural, additionner 8 fois 7 pour résoudre 8 × 7 est une procédure bien trop longue et coûteuse pour être applicable de manière systématique. Afin d'accroître leur performance de résolution, les élèves devront apprendre par cœur les tables de multiplication impliquant des nombres à un chiffre. Cela n'est pas chose facile ; de fait, même les adultes recourent régulièrement à d'autres stratégies que la récupération en mémoire pour résoudre certaines multiplications (LeFevre et al., 1996). Comme le note Butlen (2007) : « On constate un défaut d'adaptabilité des élèves pour les calculs et un manque de faits numériques mémorisés. La plupart du temps les élèves utilisent des procédures sûres mais coûteuses en temps et énergie (notamment le recours aux calculs posés) ».

La difficulté d'apprentissage des tables de multiplication réside en partie dans le fort degré d'interférence entre les faits multiplicatifs. Ainsi, 6 × 4 = 24, mais les nombres impliqués dans ce calcul ne sont pas représentés de manière isolés et uniques dans le réseau mémoriel d'une personne. En effet, le nombre 6 est aussi impliqué dans d'autres multiplications et, associé à 7, il produit 42 qui est une écriture inverse de celle de 24. Pire, 24 n'est pas seulement associé à 6 × 4 puisque 8 × 3 produit le même résultat. Ces relations complexes qui existent entre les différents faits multiplicatifs produisent des interférences qui brouillent les processus de récupération de l'information (Campbell, 1987a). Ces phénomènes d'interférence se reflètent dans les erreurs commises par les enfants et les adultes lorsqu'ils produisent un résultat incorrect correspondant à un résultat de la table associé à l'un des deux opérandes comme 9 × 6 = 48. Et malheureusement, chaque fois qu'une erreur de ce type se produit, une association erronée entre les éléments du problème, dans notre exemple entre 9, 6 et 48, est créée en mémoire. En conséquence, plus les élèves commettent d'erreurs et plus la probabilité de les commettre à nouveau augmente (Siegler, 1996). C'est la raison pour laquelle proposer aux élèves des tâches de vérification de multiplications dans lesquelles les problèmes sont parfois associés à des réponses fausses est contreproductif car des associations qui interfèrent avec la bonne réponse sont créées en mémoire à chaque présentation d'une tâche pour laquelle la réponse proposée est erronée.

Présenter un problème avec sa réponse n'est pas non plus une stratégie qui favorise le mieux l'apprentissage par cœur, même lorsque la réponse présentée est correcte. En effet, il est en général plus efficace de faire produire les réponses par les élèves, surtout lorsque ceux-ci sont encore en début d'apprentissage, plutôt que de leur faire lire les opérations avec leur réponse pour qu'ils les mémorisent (McNamara, 1995). Ce phénomène s'explique de deux manières. D'une part, lors de la lecture d'opérations en vue de leur mémorisation, les élèves ont une illusion de connaître et s'arrêtent prématurément de travailler en ayant faussement l'impression d'avoir déjà appris correctement (Campbell, 1987b). D'autre part, il est établi que le processus cognitif de recherche active d'information en mémoire est un outil d'une grande efficacité pour favoriser les apprentissages (Roediger & Butler, 2011). Ce résultat corrobore de nombreux travaux y compris hors des apprentissages mathématiques sur les apports de la profondeur de traitement pour la mémorisation.

Afin de favoriser le plus possible la mémorisation durable des tables de multiplication, une pratique intensive est à privilégier. Sans surprise, plus de temps aura pu être consacré à l'apprentissage par cœur des tables, plus les élèves atteindront un niveau élevé. Une pratique quotidienne de 3 minutes en classe durant 8 semaines parait déjà satisfaisante pour que des élèves de 6ème atteignent un bon degré de maîtrise des tables de multiplication (Knowles, 2010). Même si cet apprentissage pourrait paraître superflu car dénué de sens, l'automatisation de la production des réponses aux multiplications est pourtant nécessaire pour que les élèves puissent consacrer leur attention et leurs ressources cognitives à l'apprentissage d'activités et de concepts mathématiques de plus haut niveau, tels que la recherche de multiples communs lors de l'addition de fractions avec des dénominateurs différents ou de la factorisation d'équations algébriques (Woodward, 2006). Bien entendu, cet apprentissage par cœur doit être associé à, voire précédé d'un enseignement du concept de multiplication afin que les élèves puissent faire appel à leurs connaissances de manière flexible à l'école et dans la vie quotidienne et puissent trouver des solutions alternatives pour résoudre un problème lorsque le résultat d'un calcul ne peut pas être directement récupéré en mémoire. Il a d'ailleurs été montré auprès d'élèves en difficulté qu'associer apprentissage par cœur et apprentissage de stratégies de décomposition (ex : 8 × 6 = 8 × 4 + 8 × 2) s'avère plus efficace que l'apprentissage par cœur seul (Woodward, 2006).

3.1.3 Propositions pédagogiques

- Proposer aux élèves de maternelle et de CP des problèmes de partage équitable avec des objets variant selon un rapport fixe évident. Par exemple, « Est ce que tu pourrais partager ces gâteaux entre les deux poupées pour qu'elles aient toutes les deux la même chose à manger ? ». Dans cette situation, certains gâteaux sont deux ou trois fois plus gros que les autres. Pour faciliter l'appréhension perceptive du rapport, les gros gâteaux peuvent être construits sous la forme d'un motif répété des petits gâteaux (1 carré vs. 3 carrés collés par exemple).
- Favoriser la mémorisation des tables de multiplication en proposant aux élèves des tâches de production de résultats diversifiées (3.2.2).
- Comme proposé plus haut, travailler en CE1 des énoncés de problèmes qui facilitent la mise en œuvre d'un schéma de correspondance plutôt que d'un schéma d'addition itérée. Par exemple, pour donner un exemple concret où la multiplication peut s'appliquer, on privilégiera un énoncé tel que « Hier, Tom a donné 2 pommes à chacun de ses 3 amis. Combien Tom a-t-il donné de pommes à ses amis hier ? ».
- Proposer aux élèves de calculer et de comparer des surfaces de rectangles en leur donnant les outils pour le faire afin qu'ils opèrent eux-mêmes aux mesures de base (mesure de la longueur et de la largeur). Les représentations des situations rencontrées à l'aide de nombres rectangles gagnent à être systématisées. Ce type d'exercice permet aux élèves d'aller au-delà du schéma de l'addition répétée pour conceptualiser la multiplication. Des activités de construction matérielle, par exemple de parallélépipède rectangle, ou pavé droit, en papier, peuvent également soutenir ce format de représentation.
- Concevoir des énoncés de problèmes dans lesquels le principe de commutativité n'entre pas en conflit avec la représentation de la situation, c'est-à-dire dans lesquels le multiplicateur et le multiplicande sont interchangeables conceptuellement. Par exemple, « Dans une salle de classe, il y a 10 rangées de 9 places chacune. À combien de places différentes puis-je m'asseoir ? ».

– Introduire des problèmes qui suscitent aisément deux codages différents, chacun inversant le statut de multiplicateur et de multiplicande. Par exemple « Théo achète 15 paquets de 3 yaourts à la banane, à la fraise et à la pêche. Combien Théo a-t-il acheté de yaourts en tout ? », qui suscite la multiplication 15 × 3 ou 3 × 15 selon que l'on envisage l'addition itérée 15 fois de 3 yaourts ou l'addition itérée 3 fois de 15 yaourts d'un même arôme.

– Programmer des séances d'apprentissage intégrant des problèmes de multiplication, dont la résolution nécessite de dépasser la conception intuitive de la notion afin de travailler les concepts dans toutes leurs dimensions : des énoncés dans et hors du champ de validité de la conception intuitive de la multiplication, des énoncés impliquant des entités d'une même catégorie (pommes et oranges) ou des entités reliées fonctionnellement (pommes et paniers) et des énoncés pour lesquels la simulation mentale mène directement au résultat ou non. L'objectif est pour ces énoncés de favoriser pour les élèves l'identification des situations de multiplication de manière décontextualisée par rapport aux intuitions premières. Les énoncés proposés dans le tableau suivant permettent d'engager un travail explicite en classe sur la compréhension des expressions « fois plus » et « fois moins » avec pour objectif de ne pas favoriser les associations « fois plus ; structure multiplicative » et « fois moins ; structure de division ». Leurs structures sémantiques ont par ailleurs été choisies pour mettre en évidence trois facteurs permettant aux enseignants de moduler leur niveau de difficulté selon le nombre de discordances. Les entités en jeu dans ces exemples sont les doublets « pommes-oranges » ou « pommes-paniers » et peuvent servir de guide à la création d'autres énoncés verbaux du même type (p.ex. « tulipes-roses » et « tulipes-vases »).

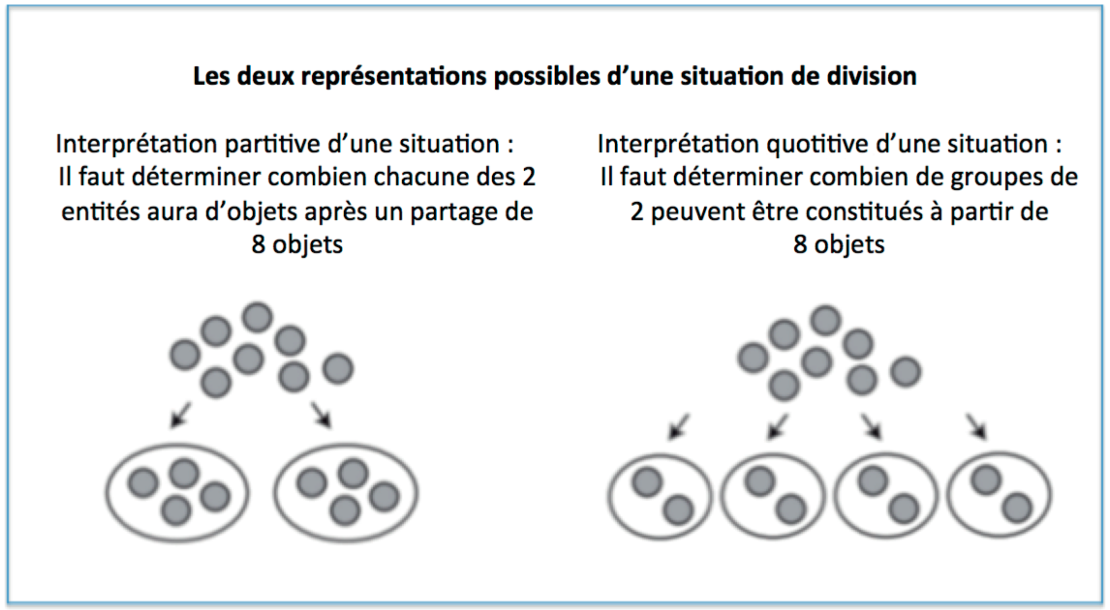
Exemples d'énoncés de multiplication	
Pierre a des pommes et 10 paniers. Pierre a 3 fois plus de pommes que de paniers. Combien Pierre a-t-il de pommes ?	Hors du domaine de validité de la conception intuitive de la multiplication, concordant pour le scénario et la simulation mentale. Version discordante pour la simulation mentale : « 3 paniers » et « 10 fois plus de pommes ».
Lou a 10 paniers et des pommes. Lou a 3 fois moins de paniers que de pommes. Combien Lou a-t-elle de pommes ?	Version « fois moins » de l'énoncé précédent.
Mattéo a des pommes et 10 oranges. Mattéo a 3 fois plus de pommes que d'oranges. Combien Mattéo a-t-il de pommes ?	Hors du domaine de validité de la conception intuitive de la multiplication, discordant pour le scénario et concordant pour la simulation mentale. Version discordante pour la simulation mentale : « 3 oranges » et « 10 fois plus de pommes ».
Mattéo a 10 oranges et des pommes. Mattéo a 3 fois moins d'oranges que de pommes. *Combien Mattéo a-t-il de pommes ?*	Version « fois moins » de l'énoncé précédent.
Gaspard a 3 pommes. Il échange chaque pomme contre 10 oranges. Combien Gaspard recevra-t-il d'oranges ?	Énoncé concordant pour la multiplication (addition itérée), discordant pour le scénario (pommes et oranges en contexte multiplicatif) et simulable mentalement. Version discordante pour la simulation mentale : « 10 pommes », chaque pomme échangée contre « 3 oranges ».

3.2 La division

3.2.1 Aspects conceptuels

La division relève du raisonnement multiplicatif et il est essentiel que l'élève saisisse, tout comme pour la multiplication, que deux quantités sont mises en relation dans un rapport fixe. Bien que classiquement la division soit rarement introduite dans les programmes scolaires avant le CM1, les élèves peuvent appréhender cette opération dès la maternelle à travers des situations de partage équitable (Ching & Kong, 2022 ; Squire & Bryant, 2002).

Cependant, même si les élèves de 5 ans sont en mesure de partager équitablement un ensemble d'objets (1 pour toi, 1 pour moi, 1 pour toi, 1 pour moi…), cela ne signifie bien sûr pas qu'ils saisissent pleinement les propriétés de la division. Ainsi, moins d'un tiers des élèves de 5 ans qui réussissent à partager équitablement savent qu'à dividende égal, plus le diviseur est élevé, moins le quotient sera grand. Plus concrètement, 70 % des élèves qui réussissent à réaliser un partage égal ne saisissent pas que plus le nombre d'enfants impliqués dans un partage est élevé et moins chacun recevra de bonbons. Exprimé différemment, ces élèves ne saisissent pas encore la relation inverse entre le diviseur et le quotient dans une division. Il faudra attendre l'âge de 7 ans pour que les élèves appréhendent cette relation inverse de manière plus systématique (Correa, Nunes, & Bryant, 1998). Cette amélioration de la compréhension des rapports entre dividende, diviseur et quotient entre l'âge de 5 et 7 ans peut tout autant être attribuable à la maturation cognitive qu'à l'expérience quotidienne ou à l'enseignement en classe et le poids de chacune de ces variables reste, à notre connaissance, indéterminé à ce jour. Cependant, il est connu que l'explication de ces lacunes conceptuelles tient en partie à la surgénéralisation de connaissances acquises sur les nombres entiers. Les élèves peuvent ainsi penser que le résultat de 2 ÷ 15 est plus élevé que celui de 2 ÷ 11 car 15 est plus grand que 11 (Hurst & Cordes, 2018 ; cf. aussi 1.2.3 et 3.3.1 sur cette question de la conception bipartite des fractions).



Outre le schéma partitif, qui est celui impliqué dans les situations de partage équitable, dans lequel la question porte sur la quantité reçue par chacun (1.2.2), les élèves auront à saisir la division également sous l'angle du schéma quotitif. La distinction principale est que dans les situations partitives, une quantité est distribuée équitablement entre plusieurs entités alors que dans les situations quotitives il s'agit de déterminer combien de groupes peuvent être constitués à partir d'une quantité donnée. Par exemple, si une personne est en possession de 8 œufs, chercher combien d'omelettes de 2 œufs pourront être cuisinées repose sur un schéma quotitif (Cf. figure pour une illustration des deux types de situations). Même si les élèves ont plus de facilité à comprendre les situations partitives que quotitives, la manière dont les problèmes sont présentés les conduit à évoquer préférentiellement un schéma plutôt qu'un autre et peut donc les aider dans leur processus de résolution (Squire & Bryant, 2002). Concrètement, si la division 8 ÷ 2 est présentée dans un contexte quotitif de la sorte « Il y a 8 poissons. Si l'on donne 2 poissons à chacun des chats, combien de chats va-t-on pouvoir nourrir ? », les élèves réussissent mieux le problème si on leur présente 4 groupes de 2 poissons plutôt que 2 groupes de 4 poissons. Inversement, si la division est présentée dans un contexte partitif (« Il y a 8 poissons. Combien de poissons peut-on donner à chacun des 2 chats ?), les performances seront meilleures si l'on représente 2 groupes de poissons plutôt que 4 groupes.

Selon Ching et Kong (2022), les difficultés que les élèves ont à se représenter les problèmes de division, principalement dans des contextes quotitifs, pourraient s'alléger autour de l'âge de 8 ans lorsqu'ils commencent à bien manipuler les multiplications. La propriété de commutativité de la multiplication pourrait rendre plus saillante la propriété d'interchangeabilité du diviseur et du quotient. Ainsi, si 6 × 3 = 3 × 6 = 18, il devient envisageable que si 18 ÷ 3 = 6 alors 18 ÷ 6 = 3. Les élèves pourraient plus facilement se détacher des situations précises décrites pour envisager les relations entre dividende, diviseur et quotient de manière plus abstraite et flexible. Cela pourrait les aider à réaliser que les énoncés décrivant des relations quotitives ou partitives peuvent se résoudre par les mêmes opérations.

Les auteurs ne discutent pas des relations entre multiplication et division mais évoquent le fait que certaines propriétés de la multiplication pourraient aider à mentaliser le monde des relations numériques. La difficulté que rencontrent les élèves à saisir la relation inverse entre multiplication et division a par ailleurs été largement étudiée. Ainsi, Robinson et al. (2006) montrent que la grande majorité des élèves de 4ème n'appliquent pas leur connaissance des relations entre division et multiplication lorsqu'ils résolvent des problèmes impliquant une série d'opérations. Ainsi, pour résoudre le problème 64 ÷ 8 × 8, 80 % des adolescents vont se lancer dans un calcul sans prendre en compte le fait que la quantité initiale reste inchangée si elle est divisée puis multipliée par une même valeur. Ce comportement reste d'ailleurs parfois observé même chez des adultes (Robinson & Ninowski, 2004). De manière quelque peu rassurante, Thevenot et al. ont montré que les performances des élèves dans la réalisation de divisions au tout début de leur apprentissage sont tout de même mieux prédites par leurs performances en multiplication que par leurs performances en soustraction et addition ou que par des capacités numériques plus générales.

3.2.2 Aspects procéduraux

Au début de l'apprentissage de la division à l'école, les élèves vont utiliser majoritairement des stratégies d'additions répétées pour résoudre des divisions. Par exemple, pour résoudre 20 ÷ 5, ils vont chercher combien de fois il est possible d'ajouter 5 pour arriver à 20 (5 + 5 + 5 + 5 = 20 donc 4). Dans un second temps, à partir du CM2, ils vont plutôt réorganiser le problème sous la forme d'une multiplication lacunaire. Ainsi, 20 ÷ 5 sera envisagé sous la forme 5 × ? = 20. Cette stratégie restera d'ailleurs dominante chez les élèves au moins jusqu'à l'âge de 12-13 ans (5ème) alors que la récupération directe en mémoire à long terme du résultat des divisions aurait pu devenir la stratégie principale plus tôt dans l'apprentissage du fait de l'occurrence fréquente de ces problèmes de division à l'école (Robinson et al., 2006).

Une explication à ce phénomène (Robinson et al., 2006) est qu'étant donné que la division est introduite après la multiplication dans le cursus scolaire, les élèves préfèrent utiliser leurs connaissances des tables de multiplication déjà bien ancrées en mémoire pour résoudre les divisions plutôt que de se lancer dans un apprentissage par cœur de nouveaux faits arithmétiques. Cette stratégie de recours à des connaissances pré-existantes est renforcée par le fait que les tables de division font l'objet d'un apprentissage beaucoup moins systématique que pour la multiplication. Ce manque de pratique des divisions peut être considéré comme regrettable car le temps et les ressources cognitives consacrés à l'usage de stratégies dérivées de la multiplication pourraient être investis dans des niveaux d'analyse et d'exécution plus complexes telles que les opérations sur les fractions. Cependant, la vitesse d'exécution d'une multiplication dérivée pourrait parfois être aussi rapide que la récupération directe du résultat de la division (Robinson et al., 2006). Toutefois, il n'est pas exclu qu'une pratique intensive des tables de division puisse accélérer la vitesse de récupération des résultats.

Les stratégies de résolution qui viennent d'être décrites sont indépendantes de contextes ou de situations particulières dans lesquels les divisions pourraient être présentées. Il est intéressant de noter que considérer les aspects conceptuels et procéduraux de la division de manière indépendante n'est pas toujours adapté puisque les procédures de résolution employées dépendent justement souvent des contextes. Ainsi, lorsque la division est présentée dans un contexte quotitif, les élèves auront plus tendance à résoudre les problèmes en effectuant des soustractions répétées que dans d'autres contextes (Fischbein et al., 1985). Par exemple, si avec 25 euros, on doit déterminer combien de fleurs à 5 euros on peut acheter, un certain nombre d'élèves partiront de 25 pour retirer 5 de manière répétée jusqu'à atteindre 0. Le nombre d'étapes requises constitue la bonne réponse au problème (25 – 5 = 20 – 5 = 15 – 5 = 10 – 5 = 0, 5 étapes), ce qui ne sera quasiment jamais observé pour un problème partitif tel que « 5 personnes se partagent 25 euros ». Cette stratégie reste cependant plutôt rare quel que soit le contexte (Robinson et al., 2006).

3.2.3 Propositions pédagogiques

- Dès la maternelle, introduire à la fois des scénarios de partage et des scénarios quotitifs en présentant aux élèves des représentations visuelles qui les aideront à construire des représentations des situations fidèles à ce qu'elles décrivent. Voir l'exemple des poissons dans la partie 3.2.1 (Squire & Bryant, 2002). Ceci devrait aider les élèves à aller au-delà d'une représentation de la division comme uniquement une situation de partage.
- Puis proposer plusieurs types de représentations pour un même problème (groupement par diviseur et groupement par quotient pour un problème partitif ou un problème quotitif) afin que les élèves saisissent que les deux représentations peuvent modéliser la même situation. Ce type d'exercice permet aussi aux élèves de mieux comprendre les rôles des dividendes, diviseurs et quotients au sein des divisions (Squire & Bryant, 2002).
- De la même manière que pour la multiplication, programmer des séances d'apprentissage intégrant des problèmes de division, dont la résolution nécessite de dépasser la conception intuitive de la notion : des énoncés dans et hors du champ de validité de la conception intuitive de division, des énoncés impliquant des entités d'une même catégorie (pommes et oranges) ou des entités reliées fonctionnellement (pommes et paniers) et des énoncés pour lesquels la simulation mentale mène directement au résultat ou non. L'objectif est pour ces énoncés de favoriser pour les élèves l'identification de situations de division de manière décontextualisée par rapport aux intuitions premières (cf aussi propositions pédagogiques du 3.2.2).

Exemples d’énoncés de division	
Line a 30 pommes et des paniers. Line a 3 fois plus de pommes que de paniers. Combien Line a-t-elle de paniers ?	Hors du domaine de validité de la conception intuitive de la division, concordant pour le scénario et pour la simulation mentale. Version discordante pour la simulation mentale : « 30 pommes » et « 10 fois plus de pommes que de paniers ».
Malo a des paniers et 30 pommes. Malo a 3 fois moins de paniers que de pommes. Combien Malo a-t-il de paniers ?	Version « fois moins » de l’énoncé précédent.
Margot a 30 pommes et 10 paniers. Combien a-t-elle de fois plus de pommes que de paniers ?	Hors du domaine de validité de la conception intuitive de la division, concordant pour le scénario et la simulation mentale. Version discordante pour la simulation mentale : « 30 pommes » et « 3 paniers ».
Margot a 10 paniers et 30 pommes. Combien a-t-elle de fois moins de paniers que de pommes ?	Version « fois moins » de l’énoncé précédent.
Line a 30 pommes et des oranges. Line a 10 fois plus de pommes que d’oranges. Combien Line a-t-elle d’oranges ?	Hors du domaine de validité de la conception intuitive de la division, discordant pour le scénario et la simulation mentale. Version concordante pour la simulation mentale : « 3 fois plus de pommes ».
Malo a des oranges et 30 pommes. Malo a 3 fois moins d’oranges que de pommes. Combien Malo a-t-il d’oranges ?	Version « fois moins » de l’énoncé précédent.
Flore a 30 pommes et 3 oranges. Combien a-t-elle de fois plus de pommes que d’oranges ?	Hors du domaine de validité de la conception intuitive de la division, discordant pour le scénario et la simulation mentale. Version concordante pour la simulation mentale : « 3 pommes » et « 10 oranges ».
Flore a 3 oranges et 30 pommes. Combien a-t-elle de fois moins d’oranges que de pommes ?	Version « fois moins » de l’énoncé précédent.

3.3 Les fractions

Les fractions sont des nombres écrits sous la forme de symboles bipartite, obéissant à un système de notation consistant en deux nombres entiers écrits avec, entre eux, un trait horizontal, appelé vinculum. Les Indiens ont introduit cette écriture bipartite, les Arabes y ont ensuite ajouté le trait. Dans les programmes internationaux de mathématiques d’école élémentaire, le mot *fractions* renvoie au sous-ensemble des nombres rationnels non négatifs[6]. Dans l’ensemble des nombres rationnels se trouvent par exemple 3/4, -1/4 ou 0 puisque 0 peut s’écrire sous la forme $\frac{0}{n}$, $n \neq 0$. En revanche, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ne sont pas des nombres rationnels car leurs numérateurs ne sont pas des nombres entiers. Les nombres négatifs sont introduits plus tardivement dans les programmes. Puisque, dans les programmes scolaires, l’étude des fractions commence bien avant l’introduction des entiers relatifs et des nombres rationnels, les valeurs de a et de b dans l’expression $\frac{a}{b}$ sont limitées à l’ensemble des nombres naturels, comme dans $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$ et $\frac{23}{10}$. C’est une fois les nombres négatifs introduits dans les progressions pédagogiques que seront étudiés les nombres rationnels dans leur ensemble.

Quel que soit le système scolaire concerné, y compris en Asie du Sud-Est où les performances aux évaluations internationales en mathématiques sont élevées, l’apprentissage des fractions s’avère difficile. À la fin des années 1970, lors d’une évaluation à grande échelle aux Etats-Unis auprès d’un échantillon représentatif de vingt mille élèves de 4ème[7], seulement 24 % des élèves choisirent la bonne réponse à la question : « Trouvez le nombre entier le plus proche pour la somme de $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ » (NAEP[8], 1978). Parmi les réponses proposées (1, 2, 19, 21 et *Je ne sais pas*), la plus fréquemment choisie était 19. Après plusieurs décennies de réformes marquées par la volonté de faire progresser les élèves dans les classements internationaux, la question fut à nouveau posée en 2014 à des élèves de même niveau scolaire. Cette fois-ci, 27 % des élèves trouvèrent la bonne réponse, soit une modeste amélioration de 3 % en 36 ans (Lorties-Forgues, Tian, & Siegler, 2015).

Les difficultés rencontrées n’épargnent pas la France, où en début de 6ème moins de la moitié des élèves réussit à transformer une écriture décimale en écriture fractionnaire et réciproquement, pour un nombre tel que 0,25 ou $\frac{1}{4}$, et seulement un cinquième des élèves réussit à encadrer le nombre $\frac{385}{10}$ par deux nombres entiers consécutifs (Chesné & Fischer, 2015). La compréhension des fractions est pourtant cruciale non seulement parce qu’elle est utile dans la vie quotidienne (respect des proportions, comparaisons de prix, calculs de pourcentages, etc.) mais également parce qu’elle est essentielle pour le développement des compétences algébriques (NMAP[9], 2008), préalable nécessaire à la poursuite d’un cursus plus avancé en mathématiques (Siegler et al., 2012).

3.3.1 Aspects conceptuels

La capacité des élèves à raisonner sur les fractions, puis sur les ratios et les proportions provient de leurs expériences avec les concepts de nombre et de fractions construits préalablement. Nous nous focalisons ci-dessous sur les principales difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves dans leur apprentissage des fractions et sur des pistes pour y faire face.

Le biais de raisonnement sur les nombres entiers

Conséquence de la conception intuitive bipartite des fractions, une tendance est observée à étendre aux fractions certaines propriétés des nombres entiers (whole number bias ; 1.2.3). Un des obstacles majeurs que rencontrent les élèves dans leur apprentissage est que ce raisonnement sur les nombres entiers n’est pas opérant dans le champ des fractions (Van Hoof, Verschaffel, De Neys, & Van Dooren, 2020). Parmi les exemples de raisonnement sur les nombres entiers rencontrés chez les élèves que connaissent bien les enseignants et qui conduisent à des conclusions erronées, se trouvent : $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ parce que 4 > 3 ; $\frac{4}{4} \neq \frac{3}{3}$ parce que 4 ≠ 3 ; $\frac{7}{9} > \frac{5}{6}$ parce que 7 > 5 et 9 > 6. Une difficulté supplémentaire est issue du fait que les élèves attribuent le statut de nombre entier à la fois au numérateur et au dénominateur de la fraction, ne considérant pas la fraction comme une entité unique, un nombre à part entière (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984). Prendre en compte cette conception intuitive afin d’engager une approche didactique visant à soutenir le développement conceptuel de la notion de fraction est un enjeu important.

6 Les nombres rationnels (dans leur écriture fractionnaire a/b) sont des nombres dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers relatifs (avec b ≠ 0). Les entiers relatifs sont les entiers naturels auxquels a été ajouté un signe positif ou négatif pour indiquer leur position par rapport à l’origine, 0, sur un axe orienté.

7 8e grade aux États-Unis

8 National Assessment of Educational Progress

9 Rapport final du National Mathematics Advisory Panel

Les limites de la représentation parties/tout

Le symbole d'une fraction particulière telle que $\frac{3}{4}$ ou celui de la notation générale $\frac{a}{b}$ se prête à une diversité d'interprétations que les élèves construisent progressivement à travers leurs expériences tant extra-scolaires que lors d'activités de classe. De nombreux systèmes scolaires privilégient l'introduction des fractions à l'école élémentaire selon l'interprétation de la partie rapportée au tout. Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux ont montré les limites de cette approche et son impact délétère sur une compréhension approfondie des nombres rationnels et des opérations pouvant être réalisées sur ces nombres (Cramer, Behr, Post, & Lesh, 2009). Il y a un enjeu éducatif important à ce que les fractions soient abordées précocement dans les programmes de l'école élémentaire afin que soient données aux élèves l'opportunité de développer une familiarité avec les fractions et une compréhension intuitive des notions fondamentales pour un travail plus avancé lors des cycles 3 et 4.

En effet, donner du sens aux nombres rationnels constitue un objectif important de l'enseignement des mathématiques au collège. Les études ont identifié des conceptions – comme la partie d'un tout, la division et le quotient, la mesure, l'opérateur, le ratio – dont les élèves devraient faire l'expérience au cycle 3 pour saisir tout l'éventail de ce que certains appellent les « personnalités » ou encore les « saveurs » des nombres rationnels (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993). Il semble important qu'une telle approche soit intégrée dans les pratiques de manière à soutenir les élèves dans le développement d'une meilleure connaissance conceptuelle des fractions. Un travail explicite des équivalences et des traductions (2.1.3) entre les sens multiples des fractions est à ce titre extrêmement utile.

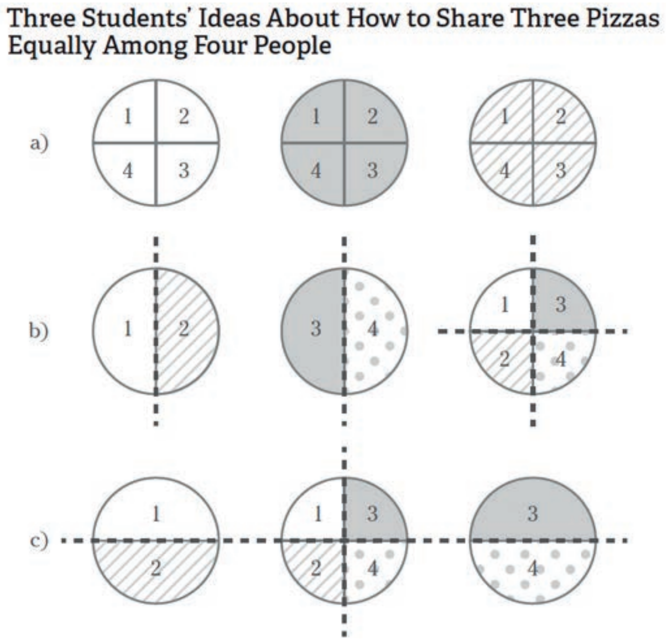
Par exemple[10] :

- La notion de « partie d'un tout » pour laquelle la fraction $\frac{3}{4}$, c'est donc 3 parties de 4 parties égales d'un tout. Les élèves apprennent à écrire le tout, c'est-à-dire l'unité, de façons multiples : $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$...
- La notion de « fraction comme un nombre » et donc représenté comme un point sur la droite numérique. Le point représentant la fraction $\frac{3}{4}$ est alors situé à $\frac{3}{4}$ de la distance de 0 à 1.
- La notion de « partie d'un ensemble ». La fraction $\frac{3}{4}$ désigne par exemple la part des filles dans un groupe de 15 filles et 5 garçons.
- La notion de « fraction comme division » : l'action de diviser un tout et le résultat de la division ; la fraction $\frac{3}{4}$ s'applique dans ce cas au partage équitable de 3 tartes entre 4 personnes. Elle exprime également la part reçue par chacun, ou le quotient de la division. La notion de « fraction comme opérateur » émerge dans de tels exemples en parlant du quotient comme « $\frac{1}{4}$ de 3. »
- Sont introduites aussi les notions de rapports ou ratios, de taux, et de pourcentages.

Apports de différentes représentations figurées

Les modèles en disque ou sous la forme d'autres figures bidimensionnelles telles que des carrés ou des rectangles sont souvent les premières représentations utilisées dans l'enseignement des fractions. Par exemple, pour la fraction $\frac{3}{5}$, trois des cinq parts égales d'un disque sont présentées en grisé dans la figure ci-dessous à gauche. De tels modèles en deux dimensions sont intéressants car ils soulignent le concept de « partie-tout » et font apparaître clairement la taille relative de la partie par rapport au tout. Notamment, « le principal avantage de la forme circulaire est la mise en valeur de ce qui reste pour faire le tout » (Van de Walle & Lovin, 2006). Dans cet exemple, les parties en grisé combinées à celles en blanc forment « le tout », ou $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}$. Dessiner de tels diagrammes est adapté à la représentation de situations de division-partition (Empson & Levi, 2011).

10 Il s'agit ici pour exemple des choix opérés dans l'approche dites de Singapour, aux niveaux scolaires allant de l'équivalent du CE1 au CM2 français



Source : Unpacking Fractions: classroom tested strategies to build students mathematical understanding, de Monica Neagoy, 2017, p. 82.

Les élèves illustrent le partage de trois pizzas entre quatre personnes d'au moins trois façons différentes (Figure ci-dessus). Ce faisant, ils comprennent la division partition, c'est-à-dire le procédé de répartir 3 unités parmi 4 personnes, tout comme le résultat de la division, c'est-à-dire le quotient $\frac{3}{4}$. Ce genre d'activité favorise chez les élèves une flexibilité dans leur interprétation de l'unité, un concept ardu pour les élèves. Dans l'exemple ci-contre, ils sont engagés à conceptualiser l'équivalence entre « 3 fois $\frac{1}{4}$ » (Ligne a de la figure ci-dessus) et « $\frac{1}{4}$ de trois » (Ligne c de la figure ci-dessus) (Lamon, 2012).

Si le schéma de la « tarte » ou de la « pizza » est très souvent utilisé, un rectangle élongé ou une « barre », que l'on divise selon sa longueur, s'avère souvent bien facile à employer, et tout aussi productif pour comprendre une fraction comme partie d'un tout (3/5 = « trois cinquièmes » = trois morceaux d'un cinquième de barre).

L'avantage de cette représentation en barre est qu'elle conduit à la représentation essentielle de la droite numérique (Dehaene, 2007) qui permet aux élèves de représenter les fractions, comme des points sur cette droite, situés entre les nombres entiers habituels : 1/2, est au milieu du segment [0, 1]. Ce format de représentation soutient l'apprentissage des fractions comme grandeurs (Schneider & Siegler, 2010). L'unité dans ce cas est représentée par la longueur d'un segment et non par l'aire d'une figure. Une expérimentation récente montre que beaucoup d'élèves de sixième échouent à placer sur la droite numérique des fractions aussi simples que 1/2 ou 1 + 1/5 (Dehaene, Potiers-Watkins, Chen, & Lubineau, 2021). Ce résultat suggère que le système scolaire français gagnerait à beaucoup plus utiliser la représentation en barre et sous forme de ligne numérique à l'école, et ce dès le CP.

Un modèle plus complexe, introduit en général plus tardivement auprès des élèves, est la représentation de la fraction comme partie d'une variable discrète : le tout est alors un entier supérieur à 1. Les élèves ont à conceptualiser que « le tout » ou l'unité correspond à une pluralité d'objets. Un problème de ce type est le suivant : « Il y a 18 cubes dont 15 bleus et 3 rouges. Quelle fraction des cubes représentent les cubes rouges ? » Le tout correspond ici à une pluralité, à 18 cubes. Le groupement des éléments d'un ensemble en sous-ensembles de cardinalité égale demande une compétence plus sophistiquée que la partition d'un tout en parts égales. Du matériel pédagogique tel que des cubes emboîtables peuvent aider à visualiser la tâche cognitivement difficile de trouver la fraction de cubes rouges dans cet ensemble de 18 cubes en formant des trains de trois cubes et en remarquant que seul un train sur les six trains est rouge, d'où la fraction $\frac{1}{6}$.

Les recherches montrent que l'utilisation de représentations figurées (matériel pédagogique, dessins ou créations d'élèves) aide au développement de la compréhension des fractions. De plus, ils suggèrent qu'il est bénéfique que les élèves manipulent des représentations visuelles et tactiles diverses (Petit, Laird, Marsden, & Elby, 2010), en suivant des approches pédagogiques variées, intégrant en particulier des représentations diversifiées, des situations problèmes, des représentations symboliques (Lesh, Landau, & Hamilton, 1983). Pour augmenter l'impact du matériel pédagogique sur une construction plus aboutie des concepts, l'explicitation des liens entre les diverses représentations paraît être un geste professionnel indispensable à mobiliser (Clements, 1999). Les représentations choisies peuvent donc d'une part illustrer une interprétation de fraction et d'autre part servir de point de départ au développement de conceptions plus abstraites : ces deux modalités, de contextualisation et de décontextualisation, sont complémentaires et indispensables.

Les écueils de la compréhension de l'unité

Une difficulté majeure rencontrée par les élèves relève de la conception de la notion d'unité. Or, le concept du tout est à la base du concept de fraction. En d'autres termes, une fraction est toujours en relation avec un tout explicite ou implicite : « Comprendre que la grandeur d'un nombre en écriture fractionnaire est relative à la taille de l'unité est une clé pour comprendre les nombres rationnels » (Barnett-Clarke, Fischer, Marks, Ross, & Zbiek, 2010). Trouver une partie fractionnaire d'un tout est souvent une des premières étapes de la compréhension que les fractions n'ont de sens qu'au regard d'un tout. Comme évoqué plus haut, les élèves débutent avec l'interprétation de la partie d'un tout. Ils passent ensuite à des touts plus grands et des fractions plus complexes pour développer des concepts tels que la grandeur relative, l'équivalence et les opérations. La première difficulté rencontrée par les élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes impliquant une fraction, est d'identifier le tout, explicite ou implicite, quand ce tout consiste en plus d'un élément, d'une pièce ou d'un objet (Payne, 1976). Par exemple, le tout peut-être un paquet de 2 gâteaux. Les activités usuelles dans lesquelles les élèves colorient une fraction d'une forme simple et dénomment la fraction ainsi coloriée renforcent cette conception limitante selon laquelle toutes les unités sont faites d'*un seul* objet.

Une seconde difficulté survient pour les fractions supérieures à 1. Les difficultés qui s'observent dans ces situations ont pour source la conception « partie d'un tout », qui coïncide le plus souvent avec l'expérience initiale des fractions. Une limitation évidente à interpréter $\frac{a}{b}$ comme « a parties de b parties égales » est la conclusion tacite que a est nécessairement inférieur à b ; par conséquent, les fractions dont le numérateur est supérieur au dénominateur apparaissent comme dénuées de sens (Neagoy, 2017).

Une troisième difficulté est de déterminer le tout ou l'unité lorsque seulement une partie du tout, ou une fraction du tout, est donnée, particulièrement avec les fractions qui ne sont pas des fractions unitaires (Behr & Post, 1992). Traditionnellement, les tâches scolaires privilégient des situations dans lesquelles le tout est donné et la fraction est à chercher, par exemple, un dessin d'un gâteau coupé en 12 parts. « 3 parts ont été mangées. Quelle fraction du gâteau a été mangée ? ». Les élèves n'ont ainsi que rarement l'occasion de chercher le tout à partir d'une fraction donnée, par exemple, « J'ai mangé 3 parts. Elles représentaient un quart du gâteau. En combien de parts était coupé le gâteau ? ».

Les difficultés de compréhension de l'unité sont souvent repérables dans les activités de comparaison de fractions. Ainsi, seulement un quart des élèves de CM1 proposent une réponse satisfaisante à la question suivante : « José a mangé $\frac{1}{2}$ pizza. Ella a mangé $\frac{1}{2}$ d'une autre pizza. José dit qu'il a mangé plus de pizza que Ella mais Ella dit qu'ils ont tous deux mangé la même quantité. En te servant de mots ou de dessins, montre que José peut avoir raison ». L'erreur la plus fréquente est de répondre qu'Ella a forcément raison puisque 1/2 égale toujours 1/2 (Kouba, Zawojeski, & Strutchens, 1997).

3.3.2 Aspects Procéduraux

Une autre difficulté majeure que rencontrent les élèves dans le domaine des fractions concerne les compétences calculatoires. La majorité des études révèle que les élèves qui réussissent les exercices de calcul sur les fractions ont tendance à faire preuve d'une « expertise de routine » plutôt que d'une « expertise adaptative » (Baroody, 2003). L'expertise adaptative est définie dans la littérature comme la capacité à appliquer avec du sens, et de manière flexible et créative, les procédures arithmétiques apprises (Hatano & Oura, 2003) ; les élèves disposent alors de plusieurs stratégies différentes pour une même opération qu'ils adaptent à la situation en question. Par contraste avec l'expertise adaptative, l'expertise de routine se définit comme la capacité à résoudre rapidement et correctement des problèmes de mathématiques scolaires standard, sans nécessairement les comprendre : connaître les opérations sur les fractions devient synonyme de savoir exécuter les algorithmes de calcul et produire des réponses correctes. Lorsque les opérations sur les nombres rationnels sont enseignées comme des règles sans lien les unes avec les autres, elles sont alors difficiles à retenir et dépourvues de sens apparent. Les élèves se découragent et deviennent confus lorsqu'il s'agit, par exemple, de chercher pourquoi certaines opérations requièrent de trouver d'abord les dénominateurs communs, alors que d'autres non (Barnett-Clarke et al., 2010) ? Ou pourquoi il est possible de multiplier les numérateurs et les dénominateurs lors de la multiplication de fractions, alors qu'il n'est pas correct d'ajouter les numérateurs et les dénominateurs lors de l'addition de fractions ? Pourquoi la procédure de division des fractions est-elle si compliquée alors que celle de la multiplication des fractions est si simple ? « Le résultat est une litanie de procédures apparemment sans rapport que les élèves doivent mémoriser, et les tentatives à leur trouver un sens sont rapidement abandonnées » (Neagoy, 2017).

La difficulté pour les élèves à attribuer du sens aux calculs sur les fractions concorde avec les résultats d'études réalisées auprès d'enseignants sur ces mêmes sujets. Deux études récentes, l'une internationale menée auprès d'enseignants en formation initiale (Olanoff, Lo, & Tobias, 2014) et l'autre états-unienne menée auprès d'enseignants en poste (Copur-Gencturk, 2021), ont abouti à des conclusions comparables. Les 43 études réalisées sur une vingtaine d'années auprès d'enseignants en formation initiale montrent que leur maîtrise des fractions est relativement solide lorsqu'il s'agit d'exécuter des procédures, mais que s'éloigner des procédures et utiliser le « sens commun des nombres fractionnaires » représente un obstacle. Des difficultés sont identifiées également dans la compréhension du sens des procédures ou de la raison pour laquelle ces procédures fonctionnent. Concernant les enseignants en formation continue, les recherches suggèrent que leur compréhension de l'arithmétique des fractions est également parcellaire.

Le Rational Number Project (RNP), un projet de recherche et développement coopératif multi-universitaire financé par la National Science Foundation (NSF) aux États-Unis, de 1979 à 2002, a enquêté sur l'apprentissage des fractions par les élèves et a élaboré un programme d'apprentissage du « sens des nombres fractionnaires » chez les élèves de quatrième et cinquième année de primaire (CM1 et CM2). En effet, la focale a été mise sur la compréhension conceptuelle des fractions à partir d'une variété de modèles concrets, en élaborant des stratégies informelles reposant sur des représentations mentales des fractions, en créant concrètement le sens de l'équivalence et en estimant les sommes et les différences des fractions *avant* l'introduction des algorithmes de calcul. Les élèves qui ont élaboré des stratégies pour ordonner les fractions en s'appuyant sur une démarche conceptuelle ont également été en mesure de les mettre en œuvre pour réaliser les exercices d'estimation. Par exemple, en réponse à la question suivante : « Estimez 2/3 + 1/6. Cette somme est-elle supérieure à 1/2 ou inférieure à 1/2 ? Est-elle supérieure à 1 ou inférieure à 1 ? » Un élève a répondu de la manière suivante : « 2/3 est supérieur à 1/2 ; si on ajoute 1/6, ce n'est pas supérieur à 1 parce que 1/6 est inférieur à 1/3 » (Cramer & Henry, 2002).

Le RNP et d'autres projets curriculaires d'envergure (par exemple Lamon, 2007 ; Moss, 2002) qui tentent de développer la compréhension des fractions chez les élèves ont plusieurs aspects en commun. Ils cherchent à donner un sens aux nombres rationnels avant de travailler avec les symboles et les procédures formelles ; ils aident les élèves à saisir les fractions, les décimaux et les pourcentages comme des grandeurs ; ils utilisent des modèles concrets et des contextes du monde réel pour donner un sens aux fractions utilisées ; ils favorisent les liens entre les modèles visuels ou tactiles et les notations symboliques formelles.

3.3.3 Propositions pédagogiques

La recommandation la plus importante est de ne pas limiter la compréhension d'une fraction a un modèle mental tel que que « $\frac{a}{b}$ veut dire prendre a parties parmi b parties égales » mais d'élargir l'interprétation de $\frac{a}{b}$ comme « a copies ou itérations de la fraction unitaire » (CCSSM[11], National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, 2010). Cette approche doit favoriser la compréhension des fractions, par exemple $\frac{3}{5}$, comme des constructions multiplicatives, c'est-à-dire comme « 3 itérations de $\frac{1}{5}$ » qui devient « 3 fois $\frac{1}{5}$. » Les élèves pourront ainsi envisager sans difficulté majeure la fraction $\frac{7}{5}$ plus tard comme 7 « un cinquième » ou « 7 fois $\frac{1}{5}$ ».

Dans l'objectif d'aider les élèves à dépasser le stade d'une expertise routinière des calculs avec les fractions et à favoriser le développement d'une expertise plus flexible et pourvu de sens, plusieurs propositions peuvent ainsi être données :

- n'introduire les opérations formelles avec des fractions qu'une fois que les élèves ont développé un sens de la grandeur relative des fractions, ce qui peut s'appuyer sur des modèles concrets (modèle en barre, ligne numérique) ;
- donner aux élèves l'opportunité de développer une compréhension approfondie de l'équivalence des fractions au-delà du simple algorithme $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$;
- mettre l'accent sur l'estimation lorsque sont enseignées les opérations avec des fractions avant d'introduire les algorithmes de calcul ;
- établir des liens entre la signification des opérations avec des nombres entiers et des opérations avec des fractions tout en soulignant les différences de procédures ;
- ancrer les opérations sur les fractions dans des contextes de la vie quotidienne pour aider les élèves à mieux saisir la signification des procédures de calcul sur des fractions.

Les pistes ci-après pour des activités sur les fractions ne sont pas des exercices mathématiques scolaires traditionnels. L'objectif des propositions suivantes est de cultiver chez l'élève un sens des fractions, de l'unité, de la comparaison, des opérations qui soit ancré dans une compréhension plus profonde des concepts mathématiques. Il s'agit de favoriser le développement d'une « expertise adaptative » plutôt qu'une « expertise de routine ».

Activités autour de différentes significations d'*une fraction* afin de favoriser la mise en lien entre plusieurs sens d'une fraction : une partie d'un tout, une division (l'action de diviser et le quotient obtenu), et une partie d'un ensemble.

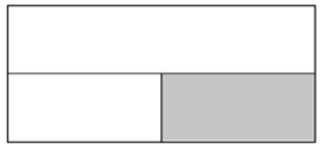
Par exemple, pour la fraction $\frac{5}{6}$, on cherche en classe des contextes pour lesquels, elle peut avoir le sens de

- « partie d'un tout » (par exemple 5 parts de pizza, d'une pizza découpée en 6 parts)
- « action de diviser » (par exemple partager 5 tartelettes équitablement entre 6 personnes)
- « quotient » (par exemple, chaque personne reçoit 5/6 d'une tartelette dans l'exercice précédent)
- « partie d'une collection ou d'un ensemble » (par exemple, la fraction de cubes rouges dans un groupe de 18 cubes dont 15 sont rouges et 3 bleus)
- « placement sur la ligne numérique » (partager le segment [0, 1] en 6 segments égaux et placer 5/6)

11 Common Core State Standards for Mathematics

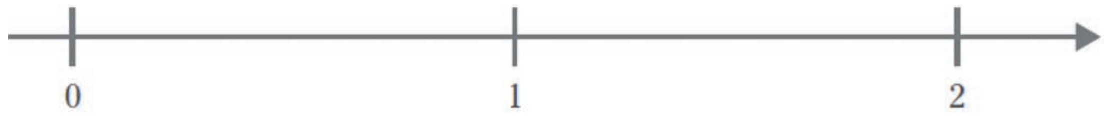
Activités destinées à soutenir la compréhension que le dénominateur indique de quelles parties fractionnées il s'agit et que les parties fractionnées du tout sont *toujours égales*.

Par exemple, Idris et Adèle discutent de la fraction qui correspond à la partie grisée par rapport au tout (la figure dans sa totalité) : Idris dit : « C'est $\frac{1}{3}$ du tout. » ; Adèle réagit : « Non, moi je crois que c'est $\frac{1}{4}$. »
Le professeur demande aux deux élèves d'expliquer leur raisonnement.
A ton avis, quelle pourrait être l'explication d'Idris ?
A ton avis, quelle pourrait être l'explication d'Adèle ?
Es-tu d'accord avec Idris ou avec Adèle ? Explique pourquoi



Activités destinées à comprendre les fractions inférieures et supérieures à 1 comme des multiples d'une fractions unitaire, en les représentant sur la droite numérique.

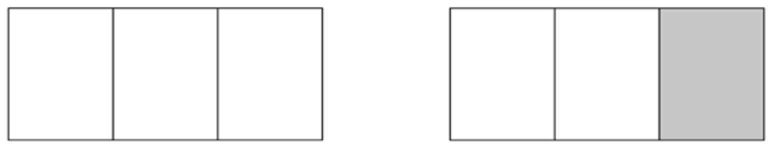
Par exemple, fais des bonds sur la droite numérique. Place la fraction $\frac{1}{4}$ sur la droite numérique. Fais ensuite des bonds de « $\frac{1}{4}$ » jusqu'à $\frac{3}{4}$, puis jusqu'à $\frac{7}{4}$. Place ces deux fractions sur la droite numérique. Pour atteindre $\frac{7}{4}$, tu es passé par la fraction $\frac{4}{4}$. Donne un autre nom à cette fraction.



Place la fraction $\frac{1}{3}$ sur la droite numérique. Fais ensuite des bonds de « $\frac{1}{3}$ » jusqu'à $\frac{2}{3}$, puis jusqu'à $\frac{5}{3}$. Place aussi ces deux fractions sur la droite numérique. Quelle est la distance entre les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{3}$ sur la droite numérique ? Explique ta réponse.

Activités destinées à soutenir la compréhension que l'unité n'est pas nécessairement *un seul objet*.

Par exemple, la partie grisée représente la part restante de deux gâteaux.



Emma dit que la fraction de gâteaux mangée est $\frac{5}{3}$, et Koffi affirme que c'est $\frac{5}{6}$.
Essaie d'expliquer le raisonnement d'Emma.
Essaie d'expliquer maintenant le raisonnement de Koffi.
Es-tu plutôt d'accord avec Emma ou avec Koffi ?
Montre qu'en choisissant des unités différentes, Emma et Koffi peuvent tous les deux avoir raison.

Un autre exemple d'activité portant sur cette compréhension de l'unité pourrait être : « J'ai 3 bouteilles. J'en ai bu le tiers. Colorie ce que j'ai bu. Propose plusieurs réponses ». 2 points de vue sont possibles : un tiers de chaque bouteille, ce qui fait 3/3 ou 1 bouteille (l'unité est la bouteille), a pu être bu ; ou un tiers des 3 bouteilles, ce qui fait 1 bouteille (l'unité est les 3 bouteilles).

Activités destinées à soutenir la compréhension que le choix de l'unité peut varier.

Par exemple, la flèche désigne un point P de la droite numérique qui représente un nombre.

Indique en vert où se trouve le nombre 1 si le point P représente le nombre 3.
Indique en bleu où se trouve le nombre 1 si le point P représente le nombre $\frac{3}{4}$.
Indique en rouge où se trouve le nombre 1 si le point P représente le nombre $\frac{3}{2}$.

Activités destinées à faire appel à l'estimation de l'ordre de grandeur des fractions avant d'enseigner les algorithmes de calculs, pour développer le sens donné aux opérations et anticiper l'ordre de grandeur des résultats.

Par exemple, la somme $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ est-elle supérieure ou inférieure à $\frac{1}{2}$?
Est-elle supérieure ou inférieure à 1 ?

Léa n'a pas fait de calcul pour répondre à ces deux questions. Elle a répondu ainsi :
« $\frac{2}{3}$ est supérieur à $\frac{1}{2}$ donc la somme est aussi supérieure à un $\frac{1}{2}$. »
« Il faudrait ajouter $\frac{1}{3}$ à $\frac{2}{3}$ pour faire $\frac{3}{3}$, ce qui fait 1. Mais puisque $\frac{1}{6}$ est inférieur à $\frac{1}{3}$, la somme est inférieure à 1 ».
En utilisant le même type de raisonnement que Léa, peux-tu dire si la différence $\frac{7}{8}-\frac{2}{4}$
- est supérieure ou inférieure à $\frac{1}{2}$?
- est supérieure ou inférieure à 1 ?

Activités destinées à s'assurer que l'élève ne s'appuie pas sur la seule conception bipartite des fractions

Proposer des exercices de comparaisons de fractions discordants avec les stratégies intuitives telles que « plus le numérateur ou dénominateur est grand, plus la fraction est grande » : dans le cas d'une paire discordante comme 2/9 vs 1/3, si l'élève compare les numérateurs (2 > 1) et les dénominateurs (9 > 3), il conclut de façon erronée que 2/9 > 1/3. Pour réussir, l'élève doit percevoir la fraction comme grandeur.

Activités destinées à favoriser le développement de l'expertise adaptative, fondée sur une diversité de codage d'une même situation

Introduire des énoncés de problèmes pouvant se résoudre par plusieurs stratégies distinctes grâce à l'adoption de deux points de vue, soit celui de structure bipartite, soit celui de grandeur.

Un problème de fraction pour favoriser l'adoption du point de vue de la fraction comme structure bipartite et du point de vue de la fraction comme grandeur peut être le suivant : « Au goûter, il y a 2 cakes, un avec des noix et un avec des raisins. Julia, Yliès et Mylan veulent se partager les cakes. Ils veulent tous les 3 manger la même quantité. Quelle fraction de cake va manger Julia ? » Il existe 2 réponses possibles : Julia mangera 1/3 de chaque cake ou Julia mangera 2/3 d'un cake. Dans la conception bipartite de la fraction, la réponse de l'élève sera 1/3 de chaque cake, car cette conception consiste à partager chaque tout (ici un cake) en parties.

La phrase en gras ajouté à l'énoncé est susceptible de favoriser l'adoption d'un deuxième point de vue, et donc un recodage de l'énoncé (1.3.3) qui adopte la perspective d'une fraction comme grandeur : « Au goûter, il y a 2 gâteaux : un avec des noix et un avec des raisins. Julia, Yliès et Mylan veulent se partager les cakes. **Julia est allergique aux noix.** Ils veulent tous les 3 manger la même quantité. Quelle fraction de cake va manger Julia ? ». Dans ce dernier énoncé, étant donné que Julia est allergique au cake aux noix, elle peut manger uniquement le cake aux raisins. Ce deuxième énoncé favorise la solution de donner les deux tiers d'un cake aux raisins à Julia.

Bibliographie

Apéry, R. (1982). Mathématique constructive. In F. Guénard & G. Lelièvre (Éds.), *Penser les mathématiques : Séminaire de philosophie et mathématiques* (J. Dieudonné, M. Loi, R. Thom) (pp. 58-72). Paris : Éditions du Seuil.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., Ross, S., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility : The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1-33). Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Bass, H. (2018). Quantities, Numbers, Number Names and the Real Number Line. In Bartolini Bussi, M., Sun, X. (Eds.) *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades*. New ICMI Study Series. Springer, Cham.

Bassok, M., Chase, V. M., & Martin, S. A. (1998). Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology*, 35(2), 99-134.

Behr, M. J., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics teaching*, 92(1), 13-15.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Behr, M. J., & Post, T. R. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed., pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment, *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 323-341.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 399-420.

Bonato, M., Fabbri, S., Umilta, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 33(6), 1410-1419.

Brissiaud, R., & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science*, 13(1), 92-107.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : Étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 241-277.

Butlen, D. (2007). Le calcul mental entre sens et technique : Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Campbell, J. I. D. (1987a). Network interference and mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13(1), 109-123.

Campbell, J. I. D. (1987b). Production, verification, and priming of multiplication facts. *Memory & Cognition*, 15(4), 349-364.

Chesné, J.-F., & Fischer, J.-P. (2015). *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire*. Université de Lorraine, Laboratoire InterPsy : Cnesco.

Ching, B. H.-H., & Kong, K. H. C. (2022). Development of children's informal understanding of division through sharing: Contributions of reasoning demands and problem situations. *Early Childhood Research Quarterly*, 59, 228-242.

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: Results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 525-545.

Cramer, K., Behr, M., Post, T. R., Lesh, R., (2009). Rational Number Project (RNP): Initial Fraction Ideas.

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Coopmans, C., Vertesi, J., Lynch, M. E., & Woolgar, S. (Eds.). (2014). *Representation in scientific practice revisited*. Cambridge, MA: MIT press.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321-329.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). The mathematical education of teachers (Vol. 11). Providence, RI: American Mathematical Society American Mathematical Society & Mathematical Association of America.

Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344-377.

Davydov, V. V. (2008). Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study. Nova Science Publishers, Inc.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solution. *Journal of Educational Psychology*, *77*(4),460-470.

Dehaene, S. *La bosse des maths, quinze ans après* (seconde édition). (Odile Jacob, 2007).

Dehaene, S., Potiers-Watkins, C., Chen, X. H., & Lubineau, M. (2021). *Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique*. CSEN, Note n° 5, février 2022.

DEPP (2020a). TIMSS 4 (Mathématiques et Sciences en fin de 4e grade, CM1 en France) - *Note d'Information* n° 20.46, décembre 2020 www.education.gouv.fr/timss-2019-evaluation-internationale-des-eleves-de-cm1-en-mathematiques-et-en-sciences-les-resultats-307818

DEPP (2020b). CEDRE Mathématiques en fin d'école (fin de CM2) - *Note d'Information* n° 20.33, septembre 2020 www.education.gouv.fr/cedre-2008-2014-2019-mathematiques-en-fin-d-ecole-des-resultats-en-baisse-306336

DEPP (2022). *Structures multiplicatives Niveau des acquis des élèves au cycle 3 Exemples d'items issus de : TIMSS 4 2019 CEDRE école 2019*. Bureau de la conception et du pilotage des évaluations des élèves (DEPP B2-1). Pôle mathématiques

DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 40(1), 71-82.

DeWolf, M., Rapp, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Semantic alignment of fractions and decimals with discrete versus continuous entities: A textbook analysis. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, 36, 2133-2138.

Deza, E., & Deza, M. (2012). *Figurate numbers*. Singapore: World Scientific.

Ding, M., & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: The distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics*, 87(1), 103-121.

Dreyfus, T. (2014). Abstraction in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 13-16). Dordrecht: Springer.

Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Felmer, P. L., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (Eds.). (2016). *Posing and solving mathematical problems : Advances and new perspectives*. Suiza: Springer.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. For the Learning of Mathematics, 9(2), 9-14.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.

Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., & Richard, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, 34(2), 439-456.

Frydman, O., & Bryant, P. (1994). Children's understanding of multiplicative relationships in the construction of quantitative equivalence. *Journal of Experimental Child Psychology*, 58, 489-509.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26, 9-25.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J. F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, 20(5), 400-410.

Goldin G.A. (2020) Mathematical Representations. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.

Gray, M. E., & Holyoak, K. J. (2021). Teaching by analogy: From theory to practice. *Mind, Brain, and Education*, 15(3), 250-263.

Greeno, J. G. (1993). For research to reform education and cognitive science. In L. A. Penner, G. M. Batsche, H. M. Knoff, & D. L. Nelson (Eds.), *The challenge in mathematics and science education: Psychology's response*. (pp. 153-192).

Gros, H., Sander, E., & Thibaut, J. P. (2019). When masters of abstraction run into a concrete wall: Experts failing arithmetic word problems. *Psychonomic bulletin & review*, 26(5), 1738-1746.

Gvozdic, K., & Sander, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 98(2), 157-175.

Gvozdic, K., & Sander, E. (2020). Learning to Be an Opportunistic Word Problem Solver: Going beyond Informal Solving Strategies. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 52(1), 111-123.

Hatano, G., & Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. *Educational researcher*, 32(8), 26-29.

Hattikudur, S., Sidney, P. G., & Alibali, M. W. (2016). Does comparing informal and formal procedures promote mathematics learning? The benefits of bridging depend on attitudes toward mathematics. *The Journal of Problem Solving*, 9(1), 13-27.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics* (J. Hiebert, ed.). New York: Routledge.

Hofstadter, D., & Sander, E. (2013). *L'analogie, cœur de la pensée*. Odile Jacob.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1997). The analogical mind. *American psychologist*, 52(1), 35.

Hurst, M. A., & Cordes, S. (2018). Attending to relations: Proportional reasoning in 3- to 6-year-old children. *Developmental Psychology*, 54, 428-439.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Knowles, N. P. (2010). The relationship between timed drill practice and the increase of automaticity of basic multiplication facts for regular education sixth graders. Doctoral Dissertation, Walden University.

Kouba, V., Zawojewski, J. & Strutchens, M. (1997). What do students know about numbers and operations? In P.A. Kenny & E. A. Silver (Eds), *Results from the sixth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, VA : Council of Teachers of Mathematics, 87-140.

Kuhn, T. (1972). *La structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

Laisant, C. A. (1907). *Initiation mathématique*. Paris : Hachette.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.

Lamon, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge.

Larsson, K., Pettersson, K., & Andrews, P. (2017). Students' conceptualisations of multiplication as repeated addition or equal groups in relation to multi-digit and decimal numbers. *Journal of Mathematical Behavior*, 48, 1-13.

Lautrey, J., Rémi-Giraud, S., Sander, E., & Tiberghien, A. (2008). *Les connaissances naïves*. Armand Colin.

LeFevre, J.-A., Bisanz, J., Daley, K., Buffone, L., Greenham, S., & Sadesky, G. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General*, 125, 284-306.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, 38, 201-221.

Lynch, M., & Woolgar, S. (Éds.). (1990). *Representation in scientific practice*. MIT press.

Maffia, A., & Mariotti, M.A. (2020) From action to symbols: giving meaning to the symbolic representation of the distributive law in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 25-40.

McNamara, D. S. (1995). Effects of prior knowledge on the generation advantage: Calculators versus calculation to learn simple multiplication. *Journal of Educational Psychology*, 87, 307-318.

McNeil, N.M., & Fyfe, E.R. (2012). "Concreteness fading" promotes transfer of mathematical knowledge. *Learning and Instruction*, 22, 440-448.

MEN (2021) *La résolution de problèmes au collège*.

MEN (2022) *La résolution de problèmes au Cours Moyen*.

Mullis, I., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 international results in mathematics. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

Nathan, M. J., & Petrosino, A. (2003). Expert blind spot among preservice teachers. *American Educational Research Journal*, 40(4), 905-928.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2010). *The standards >> mathematics*. www.corestandards.org/Math/Content/3/NF/

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington DC: U.S. Department of Education.

Neagoy, M. (2017). Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding. (Arlington, VA: Association for Supervision & Curriculum Development).

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, 40(1), 27-52.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Bell, D. (2010). The scheme of correspondence and its role in children's mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 1, 83-99.

Olanoff, D., Lo, J.-J., & Tobias, J. (2014) Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions, *The Mathematics Enthusiast*: Vol. 11: No. 2, Article 5.

Park, J-H., & Nunes, T. (2001), The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16, 763-773.

Payne, J. N. (1976). Review of research on fractions. In R. Less and D. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 145-187), Columbus, Ohio: Information Reference Center.

Petit, M. M., Laird, R. E., & Marsden, E. L. (2010) *A focus on Fractions: Bringing research to the classroom*. New York, NY: Routledge

Prather, R. W., & Alibali, M. W. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: How do we know what learners know? *Developmental Review*, 29(4), 221-248.

Rapp, M., Bassok, M., DeWolf, M., & Holyoak, K. J. (2015). Modeling discrete and continuous entities with fractions and decimals. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 21(1), 47-56.

Richland, L. E., Stigler, J. W., Holyoak, K. J. (2012). Teaching the Conceptual Structure of Mathematics, *Educational Psychologist*, 47(3), 189-203.

Rittle-Johnson, B. (2019). Iterative Development of Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics Learning and Instruction. *The Cambridge Handbook of Cognition and Education*, (May), 124-147.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587-597.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). The power of comparison in learning and instruction: Learning outcomes supported by different types of comparisons. In J. P. Mestre & B. H. Ross (Eds.), *Psychology of learning and motivation: Cognition in education* (Vol. 55, pp. 199-225). San Diego, CA: Elsevier Academic Press.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2017). The power of comparison in mathematics instruction: experimental evidence from classrooms. In *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 273-295). Academic Press.

Rivier, C., Scheibling-Sève, C. & Sander, E. (en révision). Étude des analogies intuitives dans les problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans les manuels scolaires aux élèves de cycle 2 en France. *Revue Française de Pédagogie*.

Robinson, K. M. (2017). The understanding of additive and multiplicative arithmetic concepts. In *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 21-46). Elsevier Academic Press.

Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D., Rose, D., McCarron, M. C., Globa, C.A., & Phonexay, S. D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93, 224-238.

Robinson, K. M., & Ninowski, J. E. (2004). Adults' understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 57, 321-330.

Roediger, H. L. III, & Butler, A. C. (2011). The critical role of retrieval practice in long-term retention. *Trends in Cognitive Sciences*, 15, 20-27.

Sander, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. *Les Connaissances Naïves*. Paris: Armand Colin, 57-102.

Sander, E. (2018). La résolution de problèmes à énoncés verbaux. *ANAE*, 156, 611-619

Scheibling-Sève, C., Gvozdic, K, Pasquinelli, E., & Sander, E. (sous-presse) Enhancing cognitive flexibility through a training based on multiple categorization: developing proportional reasoning in primary school. *Journal of Numerical Cognition*.

Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 36(5), 1227-1238.

Siegler, R. S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking*. Oxford, Oxford University Press.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 691-697.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909-918.

Singer, F. M., F. Ellerton, N., & Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing From Research to Effective Practice*. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-6258-3

Squire, S., & Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology*, 81, 1-43.

The National Assessment of Educational Progress (NAEP) administered in 1977-78.

Thevenot, C., & Oakhill, J. (2005). The strategic use of alternative representations in arithmetic word problem solving. *Quarterly Journal of Experimental Psychology-A*, 58 (7),1311-1323.

Thevenot, C., & Oakhill, J. (2006). Representations and strategies for solving dynamic and static arithmetic word problems: The role of working memory capacities. *European Journal of Cognitive Psychology*, 18(5), 756-775.

Thevenot, C., Tazouti, Y., Billard, C., Dewi, J, & Fayol, M. (soumis). Acquisition of new arithmetic skills capitalizes on prior arithmetic skills: A cross-sectional study from Grade 2 to Grade 5.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the learning of mathematics*, 15(1), 29-37.

Tirosh, D., & Graeber, A.O. (1991). The influence of problem type and primitive models on preservice elementary tearchers' about division. *School Science and Mathematics*, 91, 157-163.

Usiskin, Z. (2008). The arithmetic curriculum and the real world. In D. de Bock, B. Dahl Søndergaard, B. Gómez Alfonso, & C. Litwin Cheng (Eds.), Proceedings of ICME-11-Topic Study Group 10: Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic (Vol. 3, pp. 9-16).

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, 28(2), 181-209.

Van de Walle, J. A., & Lovin, L. A. H. (2006). *Teaching student-centered mathematics: Grades 3–5*. Boston: Pearson.

Van Hoof J, Verschaffel L, De Neys W, Van Dooren W. (2020) Intuitive errors in learners' fraction understanding: A dual-process perspective on the natural number bias. *Mem Cognit*. 2020 Oct; 48(7): 1171-1180. doi: 10.3758/s13421-020-01045-1. PMID: 32458410.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, (141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, 77(4), 829-848.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, 14(5), 445-451

Woodward, J. (2006). Developing Automaticity in Multiplication Facts: Integrating Strategy Instruction with Timed Practice Drills. *Learning Disability Quarterly*, 29, 269

Ce qu'il faut retenir

- Compétence cruciale pour le citoyen du 21e siècle, la compréhension mathématique est mobilisée dans la vie de chacun pour les calculs de la vie quotidienne, la lecture de graphiques, l'interprétation de toute donnée chiffrée. Elle soutient aussi la qualité des raisonnements, la capacité d'évaluation des risques et le développement de l'esprit critique.
- L'apprentissage des structures multiplicatives dont font partie la multiplication, la division et les fractions, tout en relevant d'un socle commun, se répercute sur les apprentissages ultérieurs comme les raisonnements proportionnels et algébriques.
- Les connaissances mathématiques se distinguent entre connaissances conceptuelles (les principes mathématiques) et procédurales (les algorithmes de résolution).
- Loin d'être complètement dissociées, ces connaissances se construisent l'une sur l'autre. Les procédures sont révélatrices des conceptions des élèves et les connaissances conceptuelles déterminent dans quels contextes une procédure sera appliquée.
- Les notions mathématiques sont l'objet de conceptions intuitives, dérivées de l'expérience quotidienne. Elles donnent sens à ces notions mais fourvoient dans certains contextes.
- Un enjeu majeur pour les apprentissages est que les conceptions des élèves évoluent de manière à aller au-delà des conceptions intuitives et à rencontrer le sens mathématique.
- La conception intuitive de la multiplication est l'addition répétée, celle de la division est le partage équitable, celle de la fraction est la structure bipartite.
- Lorsqu'une conception intuitive suffit pour réussir une tâche, cette réussite n'est pas indicatrice que l'élève pourra mobiliser la notion mathématique dans des contextes où la conception intuitive est limitante. Pour s'assurer d'un apprentissage il est essentiel d'introduire des situations où la conception intuitive ne suffit pas.
- Toute situation mathématique fait l'objet d'un codage par l'élève. Ce codage conditionne les stratégies envisageables et les possibilités de transfert à une nouvelle situation.
- La diversité des codages qu'un élève peut appliquer à une situation favorise son expertise adaptative, qui permet une flexibilité dans les stratégies, par opposition à une expertise de routine, où des algorithmes sont appliqués de manière systématique mais rigide.
- Des activités de comparaison entre situations favorisent les recodages qui offrent la possibilité de percevoir de nouvelles propriétés mathématiques et mettre en œuvre de nouvelles stratégies.
- Des représentations figurées peuvent soutenir la compréhension de notions mathématiques, en offrant des opportunités de recodage et en rendant visible des propriétés mathématiques pertinentes.
- Le passage d'une représentation figurée à une autre – la traduction entre représentations – favorise la perception de nouvelles propriétés mathématiques.
- La représentation par des nombres rectangles favorise la compréhension de la commutativité de la multiplication, de la multiplication entre nombres décimaux, de la distributivité de la multiplication sur l'addition, ainsi que la relation inverse entre multiplication et division.
- Le schéma de correspondance, présent chez les élèves dès 5 ans, favorise la compréhension de la notion de rapport pour la multiplication, contrairement à celui d'addition répétée.
- Pour la division, même si la notion de partage est présente à 5 ans, il reste difficile de concevoir que plus le nombre d'individus entre lesquels on partage est élevé, moins la quantité reçue par chacun l'est.
- Outre le schéma partitif de recherche de la taille d'une part, le schéma quotitif est important à mobiliser dans l'apprentissage de la division. Diversifier les figurations de la division est une aide.
- L'automatisation de la connaissance des tables de multiplication permet aux élèves de consacrer leur attention et leurs ressources cognitives à d'autres apprentissages.
- Le plus efficace pour la mémorisation des tables de multiplication consiste en des tâches de production des réponses, répétées fréquemment même sur des durées brèves.
- La récupération en mémoire est moins fréquente pour les divisions que pour les multiplications. Elle est favorisée par le progrès en multiplications.
- La conception intuitive de la fraction comme structure bipartite conduit à des échecs importants, par exemple lorsqu'il s'agit de comparer ou d'additionner des fractions.
- La représentation répandue de la fraction comme nombre de parts parmi un tout unitaire découpé en parts égales met l'emphase sur une conception partielle des fractions.
- D'autres conceptions de la fraction, telles que la position sur la droite numérique, une partie d'un tout supérieur à l'unité, un quotient, un opérateur, un ratio, constituent autant de recodages qui favorisent une expertise adaptative.
- Des représentations figurées sont à même de concrétiser ces différentes conceptions des fractions et d'être le support d'activité en classe destinées à les travailler auprès des élèves.

education.gouv.fr

Contact presse
01 55 55 30 10
spresse@education.gouv.fr

Contact Conseil scientifique de l'éducation nationale
csen@education.gouv.fr
reseau-canope.fr/conseil-scientifique-de-leducation-nationale