ACADÉMIE D'AMIENS

Liberté
Égalité
Fraternité

Dossier suivi par :
François PREDINAS
Inspecteur de l'Éducation Nationale en charge des missions Mathématiques, Sciences et EDD pour la Somme
ien80.montdidier@ac-amiens.fr
03 22 78 04 62

Circonscription
41, Avenue Jean Jaurès
80500 MONTDIDIER

Document réalisé par Amélie Billiet, conseillère Pédagogique auprès de l'IEN chargé de l'ASH

NOTE PEDAGOGIQUE

Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

Sommaire :

Introduction

Dans le cadre du premier regroupement, les enseignants des IME réunis en constellations dans le cadre du plan Mathématiques ont partagé leurs difficultés à enseigner la résolution de problèmes.

Objectifs de la résolution de problèmes :

La lecture des programmes met en évidence un triple objectif autour des problèmes :
- apprendre aux élèves à résoudre des problèmes ;
- aborder de nouvelles notions (numération décimale, sens des opérations, langage mathématique) et consolider ces acquisitions ;
- développer les capacités des élèves à chercher, raisonner et communiquer, c'est à-dire à acquérir des compétences potentiellement transférables.

Cela induit pour l'élève de :
- comprendre le problème posé ;
- établir une stratégie pour le résoudre (en faisant par exemple des analogies avec un modèle connu, en décomposant ou recomposant le problème en sous-problèmes, en s'appuyant éventuellement sur des outils auxiliaires, par exemple un schéma ou un tableau, en faisant des essais, en partant de ce que l'on veut trouver) ;
- mettre en œuvre la stratégie retenue ;
- revenir sur la solution et prendre du recul sur leur travail.

Contexte

Lors des évaluations de début d'année mais également en appui de leurs observations quotidiennes, les enseignants ont identifié une difficulté accrue des élèves à aller jusqu'à l'abstraction en mathématiques. Pour la majorité des élèves en situation de handicap, la résolution de problèmes est anxiogène, leur manque de confiance et leur absence de sentiment d'efficacité personnelle les empêchent de rentrer dans la résolution de problèmes.
A cela s'ajoute des difficultés dans la lecture de l'énoncé, la compréhension de la situation mise en jeu, le peu de sens donné aux opérations et donc une incapacité à aller jusqu'à l'abstraction.

« Abstraire correspond à l'opération mentale qui consiste à isoler une (ou plusieurs) propriété(s) d'un objet afin de la (les) considérer pour elle(s)-même(s). Cela nécessite donc de se détacher du réel, du contexte dans lequel on a manipulé et/ou représenté l'objet » *Guide Eduscol Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*

Dans le cadre de cette réflexion, il nous a semblé nécessaire de repenser l'enseignement de la résolution de problèmes afin d'aider les élèves à s'approprier la situation mise en jeu dans l'énoncé.

Problématique : Comment aider les élèves d'IME à abstraire en mathématiques dans le cadre de l'enseignement de la résolution de problèmes ?

Notions développées dans le cadre de cette formation

1 - La catégorisation des problèmes (problèmes basiques, complexes et atypiques)

Catherine HOUDEMENT

2 - La classification de Vergnaud, analogies entre les problèmes

3 - Les étapes à l'enseignement de la résolution de problèmes, guide Eduscol

L'abstraction prend appui sur trois étapes concomitantes essentielles, la manipulation, la représentation et la verbalisation, qui permettent le passage progressif vers l'abstraction.

Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

L'accès à l'abstraction est un long processus. En mathématiques, ce processus fondamental est associé à la maîtrise d'un langage symbolique et des compétences de haut niveau que sont le raisonnement et la modélisation, convoquées dans la résolution de problèmes.
Abstraire correspond à l'opération mentale qui consiste à isoler une (ou plusieurs) propriété(s) d'un objet afin de la (les) considérer pour elle(s)-même(s). Cela nécessite donc de se détacher du réel, du contexte dans lequel on a manipulé et/ou représenté l'objet.
L'abstraction prend appui sur trois étapes concomitantes essentielles, la manipulation, la représentation et la verbalisation, qui permettent le passage progressif vers l'abstraction.

LA MANIPULATION

La manipulation consiste à agir sur des objets tangibles (par exemple des cubes) ou symboliques (par exemple des nombres). Cette étape passe par l'action. Pour l'élève qui n'a qu'une expérience encore limitée des objets mathématiques, il s'agit d'apprendre «.par le faire.» dans des situations qui mobilisent du matériel.
Cependant, il est important de distinguer la manipulation passive de la manipulation active vis-à-vis d'un apprentissage mathématique visé. En effet, la manipulation permet à l'élève de s'approprier la situation, de s'en faire une première représentation.
La manipulation n'est donc pas une finalité mais une étape intermédiaire permettant d'engager un travail cognitif. Le matériel change progressivement de statut.; de matériel pour constater, observer, il devient matériel pour valider ce qu'on est capable d'anticiper. Il permet de raisonner sur les procédures

DE LA MANIPULATION À LA REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE

Cette étape est fondamentale dans la résolution de problèmes : elle convoque la représentation imagée qui amène à se représenter quelque chose sans l'avoir sous les yeux. Il peut s'agir de représenter par une image, un dessin, une photo, un pictogramme, un schéma, etc. L'action est transformée en image mentale.
Les représentations sont d'abord proches de la réalité du problème (représentation des objets tangibles), puis elles évoluent progressivement vers des représentations plus abstraites et génériques telles que les schémas ou l'écriture mathématique.
Toutes ces représentations ne se valent pas et n'ont pas la même portée, notamment dans la résolution de problèmes.

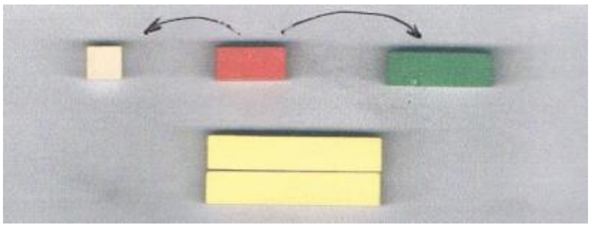
LA PLACE DE LA VERBALISATION DANS L'ACCÈS À L'ABSTRACTION

Les deux étapes décrites précédemment, la manipulation et la représentation n'ont pas d'ordre figé dans la démarche d'apprentissage de la résolution de problèmes.
En revanche, elles s'accompagnent obligatoirement d'étapes de verbalisation incontournables permettant d'accéder aux concepts mathématiques et à l'abstraction.
La verbalisation permet de mettre en mots et d'expliciter l'action, sans la produire ou la représenter visuellement. Cette étape cruciale est délicate à travailler.
La verbalisation concerne à la fois le professeur et les élèves.

4 – La manipulation

Exemple de l'utilisation des réglettes type Cuisenaire :

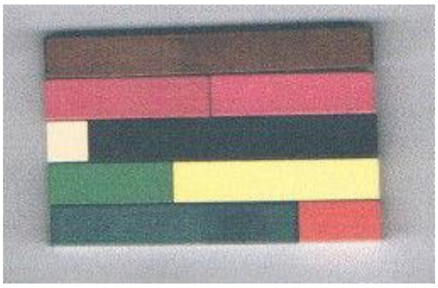
- **la phase qualitative (**sa couleur, sa longueur, ses relations avec les autres)



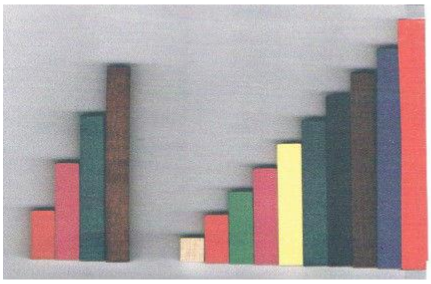
La rouge est plus grande que la blanche, et plus petite que la verte... Toutes les jaunes ont la même longueur...

Construire des trains / comparer 2 trains

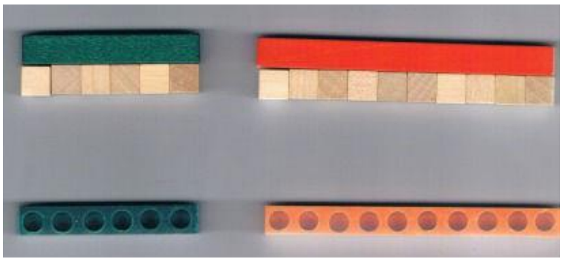
Construire des tapis



Construire des escaliers



- **à la phase quantitative :**



On est alors entré dans le système décimal et on va commencer à calculer

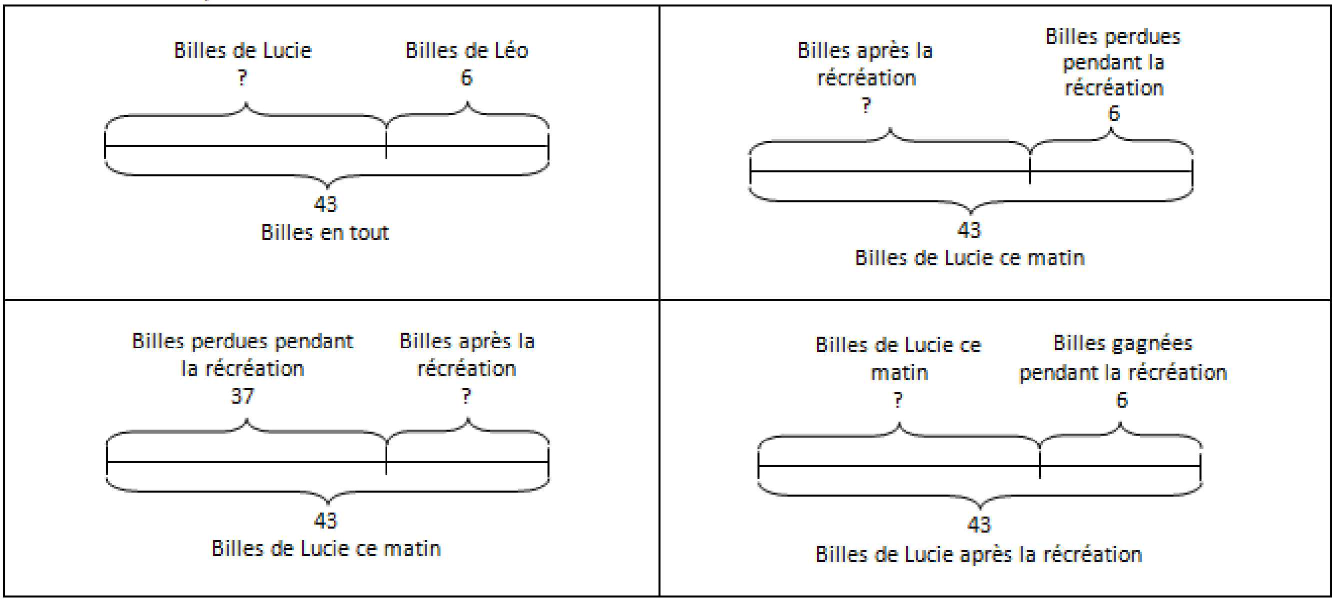
On vérifie d'abord que l'enfant maîtrise que dans le système décimal, le nombre correspond directement à une couleur et à une longueur

5 – De la manipulation à la représentation schématique

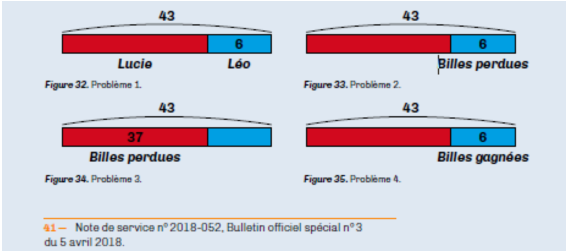
- **Exemple : La schématisation en barres**

Conformément aux programmes, la représentation iconique est un des enjeux de l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques. Il en existe plusieurs.

*Les **représentations,** sous forme de schémas bien adaptés, permettent **la modélisation** des problèmes proposés. Elles sont systématiquement utilisées lors des résolutions de problèmes menées face à la classe, afin de servir de référence aux élèves. C'est pourquoi, le modèle utilisé doit être transposable, comme un langage commun, dont on peut garder une trace. C'est une représentation particulière qui fait partie des représentations possibles.* [BO n°3 du 26 avril 2018]



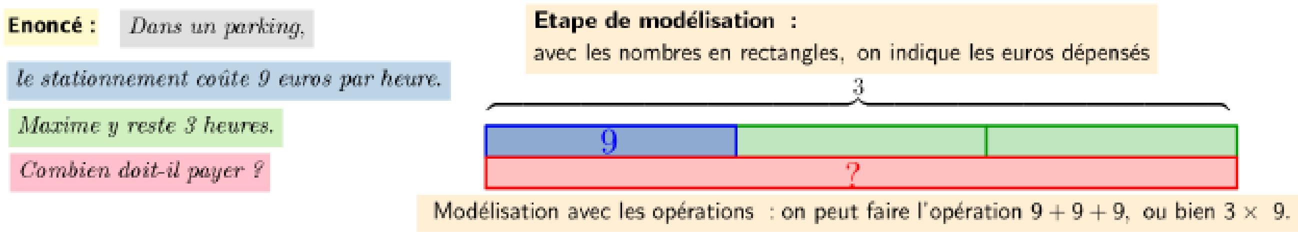
Le schéma en barres va aider les élèves à reconnaître les structures mathématiques des problèmes, les opérations et procédures sous-jacentes grâce à l'analogie visuelle entre les représentations schématiques utilisées.
Un grand avantage de cette modélisation réside dans le fait que les problèmes basiques peuvent ainsi prendre la même forme schématique et correspondre au même « modèle.». Par exemple, les quatre problèmes suivants[41] se ramènent au même type de schéma.
1. *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*
2. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation.*
Combien a-t-elle de billes maintenant ?
3. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation.*
Combien a-t-elle de billes maintenant ?
4. *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes.*
Combien de billes avait-elle avant la récréation ?



- ### Comment construire les schémas en barre ?

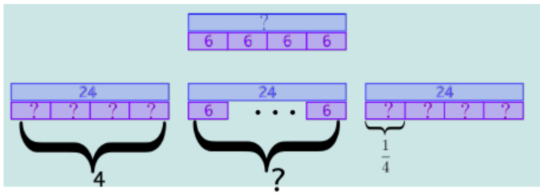
➤ **Cas des problèmes additifs : modèle « partie-tout »**

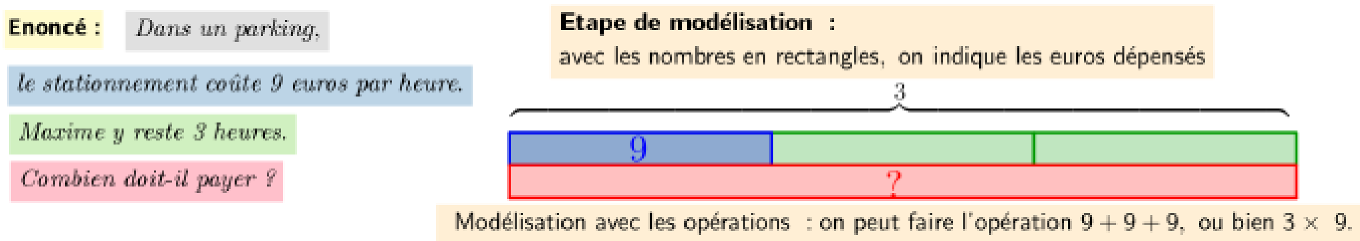
Rôle de l'unité : Les parties et le tout ne sont pas des nombres mais des grandeurs associées qui sont représentées : elles doivent être explicitées.
Tous les problèmes additifs basiques peuvent se représenter de cette manière : bien préciser au préalable la quantité la plus grande de celles qu'on étudie.
Les opérations correspondantes sont des additions ou des additions à trou : la soustraction découlera de cette dernière formulation, pouvant être comprise comme complément ou comme retrait.



➤ **Cas des problèmes multiplicatifs : un schéma compatible avec le modèle additif**

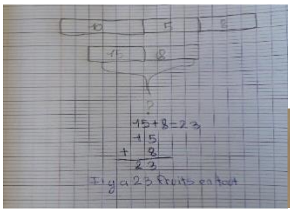
Rôle de l'unité : indispensable à préciser, en particulier pour des problèmes impliquant des fractions.
Un seul schéma pour toutes les opérations.
Les opérations correspondantes sont des multiplications ou des multiplications à trou : la division découlera de cette dernière formulation, pouvant être comprise comme partage, comme quotition, comme division euclidienne avec reste.
Bien réfléchir aux légendes accompagnant le schéma pour qu'il soit clair et non surchargé.





<u>**Des exemples en classe :**</u>

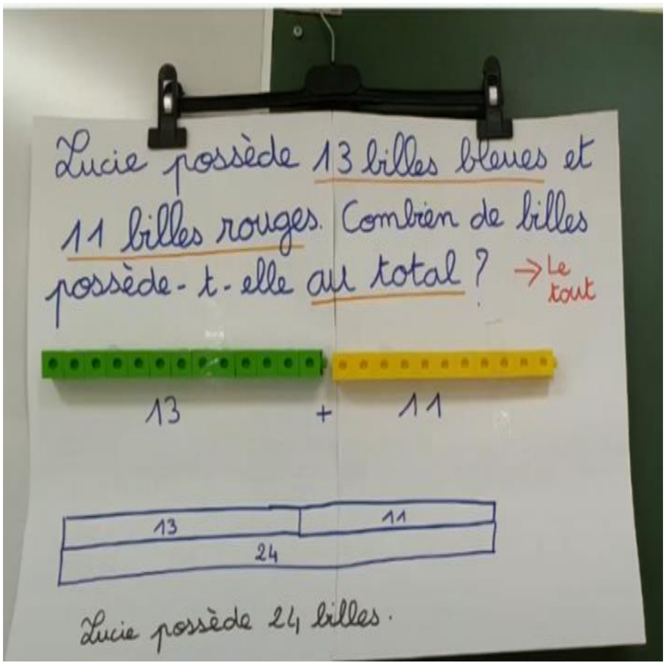
Problèmes de transformation positive (ajout) – Elément recherché : état final	Il y a 15 pommes dans la corbeille de fruits, on rajoute 8 pommes. Combien y en a-t-il maintenant ?

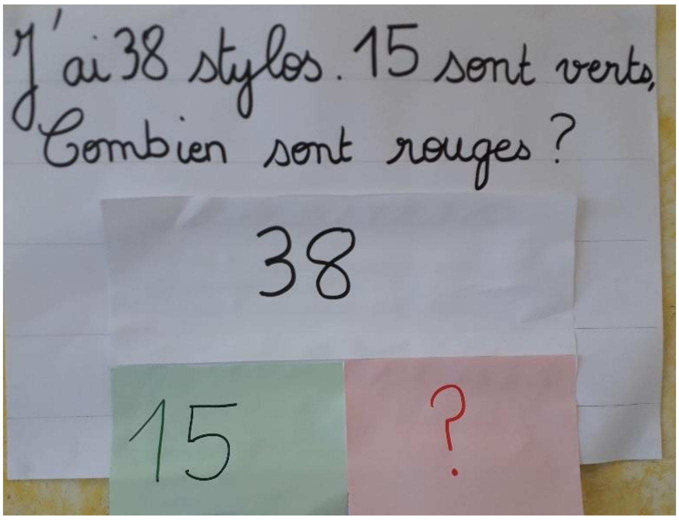


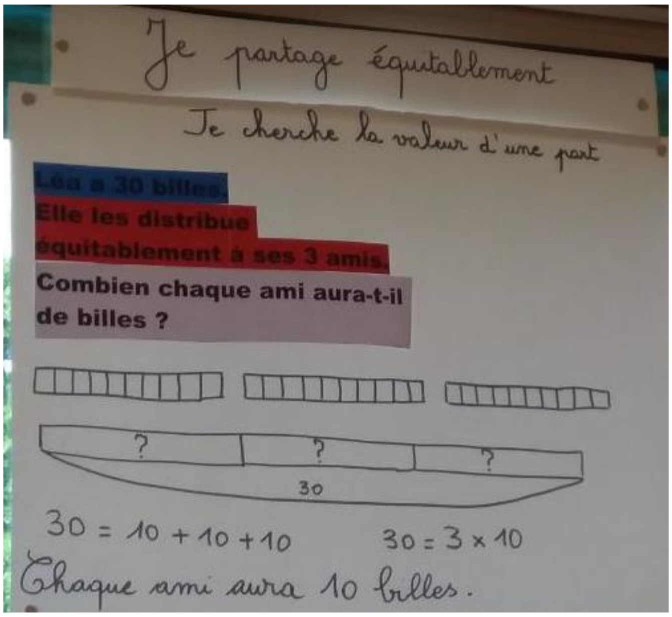
6 - La place de la trace écrite en résolution de problèmes

La démarche de résolution de problèmes s'appuie sur différents moments : manipulation active, verbalisation, représentation de la situation qui participent à la modélisation.
Tout au long de la démarche, les écrits de différentes natures mis en place par le professeur accompagnent l'activité des élèves et structurent le vécu commun de la classe. Un travail progressif doit débuter dès le CP quant à la production d'une trace écrite attendue en résolution de problèmes : schéma éventuel, calcul en ligne ou posé, phrase d'explicitation ou de conclusion.

Exemples d'affichage :







7 - La notion de progressivité en résolution de problèmes, en lien avec la construction d'échelles critériées :

L'évaluation par grilles critériées

- Démarche issue des travaux d'Isabelle BOURNAUD et Marie-Joelle RAMAJE de l'université Paris sud
- Elle repose sur un document qui décompose chaque compétence en plusieurs niveaux d'acquisition.

Dans l'organisation

- Lors des activités d'ingénierie
  - Qu'est-ce que j'évalue ?
  - Quel niveau de maîtrise atteindre ?
- Dans la pratique
  - Comment justifier mon positionnement ?
  - Comment rendre compte des différentes dimensions d'une activité ?
  - Comment être fidèle/constant/fiable dans mes corrections ?
  - Comment expliquer mes attentes à mes élèves ?

L'échelle critériée d'évaluation

- C'est un document qui détaille, pour chacune des compétences du BO, plusieurs critères de réussite.
- Chaque critère est défini par un descripteur observable simple et compréhensible par l'élève.
- Les descripteurs constituent ainsi des objectifs pédagogiques appréhendables.

Pourquoi utiliser cet outil ?

- Détailler les niveaux d'acquisition d'une compétence de manière quantitative ou qualitative.
- Favoriser l'auto-évaluation et mettre en évidence les progrès.
- Communiquer de façon explicite les objectifs à atteindre et les progrès attendus.

Socle commun : les langages pour penser et communiquer Comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et mathématiques							
MATHÉMATIQUES				*Nombres et calculs*			
Attendu de fin de cycle 2 : Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul				*Compétences et connaissances associées* : Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux partant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée, etc., conduisant à utiliser les quatre opérations ; modéliser ces problèmes à l'aide d'écriture mathématiques.			
→							
Critère de réussite 1	Critère de réussite 2	Critère de réussite 3	Critère de réussite 4	Critère de réussite 5	Critère de réussite 6	Critère de réussite 7	Critère de réussite 8
Résoudre des problèmes additifs et soustractifs de composition	Résoudre des problèmes additifs et soustractifs de transformation positive/négative	Résoudre des problèmes additifs et soustractifs de comparaison positive/négative	Résoudre des problèmes simples de multiplication (valeur de 1 donnée, recherche de plusieurs)	Résoudre des problèmes multiplicatifs (configuration rectangle)	Résoudre des problèmes multiplicatifs de comparaison (N x plus et N x moins)	Résoudre des problèmes de division partition	Résoudre des problèmes de proportionnalité

8 – Autres ressources pour enseigner la résolution de problèmes

L'ancrage des mathématiques au réel ex : Maths en vie


M@ths en-vie
Ancrez les mathématiques au réel !
ACCUEIL
ACTUALITÉ
L'ASSOCIATION
M@THS-EN VIE, C'EST QUOI ?
LES ACTIVITÉS
LES RESSOURCES
LA MÉTHODE
LE CLASSEUR D'ACTIVITÉS
LES LOGICIELS
LE RÉSEAU SOCIAL ÉLÈVE
M@THS EN CLASSE
M@THS ET DIDACTIQUE
M@THS AILLEURS
L'ESPACE ADHÉRENTS
LES BADGES
L'ESPACE PARENTS
LA PHOTOGRAPHIE AU SERVICE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES
M@ths en-vie, c'est quoi ?
M@ths en-vie, c'est une façon originale d'aborder les mathématiques ; motivante, concrète et en lien avec le quotidien des élèves. Les différentes activités proposées, de la maternelle au lycée, s'appuient sur des supports numériques (photos, vidéos, pages web) qui ne sauraient être que de simples illustrations. Ils contiennent un ou des éléments mathématiques qu'il est nécessaire de prélever pour pouvoir résoudre le problème. Pour en savoir plus sur les enjeux : cliquer ici
L'ASSOCIATION
Association
M@ths'n Co
mathsenvie.fr
Adhérer

9. Bilan :

- En terme d’évaluation, il ne m’est pas encore possible de mesurer les effets à long terme de ce plan de formation , c’est un domaine qu’il me reste à approfondir mais l’évaluation des élèves par le biais des enseignants sera interrogée d’ici la fin de l’année et à défaut sur l’année n+1 .

Certains enseignants engagés dans cette formation ont fait part d’une confiance retrouvée à enseigner aujourd’hui la résolution de problèmes, qui fait écho avec l’un des objectifs du plan de formation académique.

D’autres par le biais des échanges de pratique ont engagé **une réflexion sur leur enseignement**, et l’éloignement parfois des prescris qui était le leur et donc de la nécessité de réajuster.

A travers ces témoignages, **nous avons identifié que la formation proposée a fait évoluer les pratiques des enseignants** et a contribué à rendre leur enseignement plus explicite et donc à plus long termes faire progresser tous les élèves

Liens utiles :

- PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES DE REINVESTISSEMENT Une synthèse des pistes, Catherine HOUDEMENT

- LA CLASSIFICATION DE VERGNAUD

- MATHSENVIE

- Guide Eduscol : Le guide Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP