

## Note Pédagogique

# « Enseigner la proportionnalité au cycle 3 »

En lien avec la formation proposée dans la circonscription de Montdidier en 2020-2021

### Sommaire :

1

1) Introduction .....	page 2
2) La place de la proportionnalité dans les programmes .....	page 2
3) Définition d'une situation de proportionnalité .....	page 4
4) Le schéma de modélisation des problèmes de proportionnalité.....	page 5
5) Les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité.....	page 5
6) Les variables didactiques .....	page 7
7) Reconnaître des situations de proportionnalité .....	page 7
8) Les points essentiels de l'enseignement de la résolution des problèmes de proportionnalité .....	page 8
9) Conclusion .....	page 8
10) Lien utile .....	page 8

## 1) Introduction

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. Dans les évaluations nationales CP/CE1 et à l'entrée en sixième, de nombreux exercices portent sur cette thématique. Les résultats des élèves aux tests sont perfectibles. Il est alors important de se questionner sur la stratégie à adopter pour améliorer les performances des élèves, notamment en ce qui concerne la résolution de problèmes de proportionnalité.

## 2) La place de la proportionnalité dans les programmes

Le programme de mathématiques est composé de 3 thèmes d'étude :

- Nombres et calculs
- Grandeurs et mesures
- Espace et géométrie

Résolution de problème, organisation et gestion de données et proportionnalité sont transversales aux 3 thèmes.

### a) Les objectifs de l'enseignement des problèmes de proportionnalité au cycle 3.

Dès le cycle 2, l'élève a rencontré des situations de proportionnalité dans le cadre de la résolution de problèmes multiplicatifs.

Ce travail se poursuit au cycle 3 dans chacun des trois thèmes « Nombres et calculs », « Grandeurs et mesures » et « Espace et géométrie ». L'élève enrichit le champ des problèmes multiplicatifs en croisant diverses situations relevant de la proportionnalité auxquelles il peut donner du sens.

Il apprend à repérer des situations relevant ou non de la proportionnalité

Il résout des problèmes de prix, de consommation, de recettes, etc en utilisant différentes procédures (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre, procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité, procédure utilisant le coefficient de proportionnalité)

L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres en jeu dans le problème à résoudre.

Des situations de proportionnalité mettant en jeu des nombres simples, avec des rapports entre les nombres permettant des calculs aisés, donnent l'occasion de travailler le calcul mental.

### b) La progressivité des apprentissages.

La notion de proportionnalité est introduite en première année du cycle 3. Le travail mené s'appuie tout particulièrement sur les problèmes multiplicatifs traités au cycle 2. Les procédures rencontrées au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continueront d'être utilisées au cycle 4 où seront introduites, en fin de cycle, les fonctions linéaires. C'est donc tout au long des trois cycles de la scolarité obligatoire que se construisent progressivement les connaissances relatives à la notion de proportionnalité.

Au cycle 2, les élèves rencontrent des situations de proportionnalité dans des problèmes multiplicatifs.

Exemple :

Un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?

Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.

Au cycle 3, les premiers travaux sur la proportionnalité sont proposés dès la première année du cycle les élèves ont recours à des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre) Ensuite, les élèves rencontrent progressivement des situations qui nécessitent de combiner des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité) Pendant la seconde moitié du cycle, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.

Au cycle 4, toutes les procédures introduites au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continuent à être utilisées en fonction des nombres en jeu dans les problèmes proposés et des connaissances de faits numériques des élèves Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes ils facilitent l'utilisation du coefficient de proportionnalité, particulièrement efficace quand un nombre important de données doivent être calculées. Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions il permet de calculer rapidement une quatrième proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité. En fin de cycle, les élèves font le lien entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.

c) Les stratégies d'enseignement.

La proportionnalité est appréhendée dans de nombreuses autres disciplines (EPS, sciences et technologie, etc ou dans des situations de la vie courante, ce qui permet de renforcer le travail mené en mathématiques L'enseignant propose aux élèves des situations variées relevant de la proportionnalité et leur apprend à mobiliser différentes procédures pour résoudre des problèmes dans des contextes variés.

L'enseignant invite les élèves à comparer ces procédures afin de constater que certaines sont plus efficaces que d'autres selon les nombres en jeu.

Les relations entre les nombres mis en jeu constituent une variable didactique avec laquelle l'enseignant peut jouer. En effet, les rapports entre les nombres en jeu et la connaissance des tables de multiplication dans les deux sens (composition décomposition) par les élèves vont influencer sur le choix de la procédure à privilégier.

L'enseignant propose dans un premier temps des situations mettant en jeu des nombres entiers entretenant entre eux des rapports simples (triple, quintuple, etc pour aller progressivement vers des situations plus compliquées (nombres décimaux, fractions, rapports plus complexes).

Les tableaux de proportionnalité ne doivent pas être conçus comme des objets d'enseignement s'ils peuvent permettre de résumer clairement une situation proposée dans un problème, les

opérations à réaliser pour résoudre un problème de proportionnalité au cycle 3 ne doivent pas se faire par un raisonnement sur des lignes ou des colonnes d'un tableau mais uniquement sur des cardinaux ou des grandeurs, en explicitant ce qui est fait, tant à l'oral qu'à l'écrit

L'enseignant permet aux élèves de dégager les avantages et inconvénients de différentes procédures possibles mais ne les présente pas comme les seules procédures attendues lors de la résolution d'un problème relevant de la proportionnalité. En variant les nombres et les relations numériques, l'enseignant habitue l'élève à changer de procédure pour choisir de manière pertinente la plus efficace pour lui.

4

### 3) Définition d'une situation de proportionnalité.

DICO  
45

## Résoudre des problèmes de proportionnalité

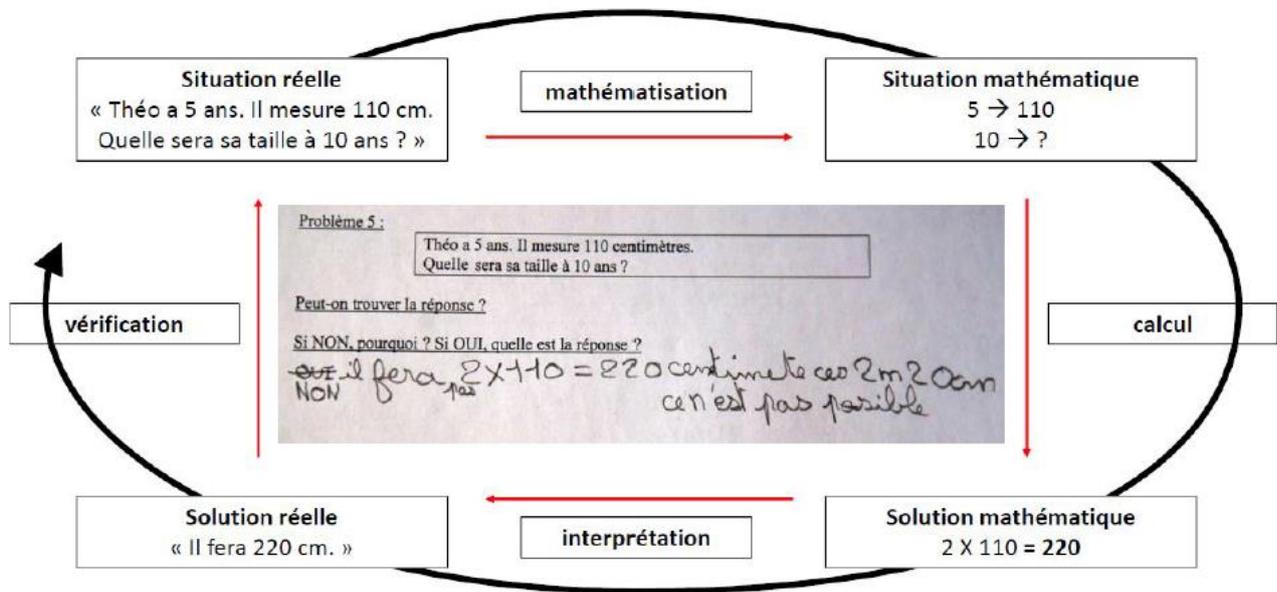
- Un problème est appelé « problème de proportionnalité » si deux grandeurs (quantités, prix, longueurs, masses...) sont en relation l'une avec l'autre et si, lorsque l'une est doublée, triplée..., l'autre est également doublée, triplée...

Extrait du CAP MATHS CM

Deux grandeurs (*ou deux suites de nombres*) sont dites proportionnelles si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre non nul. Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Extrait de Maths Monde Cycle 4

#### 4) Le schéma de modélisation des problèmes de proportionnalité.



5

#### 5) Les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité.

Deux catégories de procédures :

- Celles liées aux propriétés dites de « linéarité ».
- Celles liées au coefficient de proportionnalité.

L'objectif n'est pas de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir.

La comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces différentes procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres.

Il peut être impossible pour l'enseignant de reconnaître la stratégie utilisée par l'élève si la procédure est uniquement numérique.

Le passage à l'oral pour expliciter une procédure est important.

Il s'agit de mettre des mots sur les actes et d'explicitier les données numériques manipulées avec les unités (« la qualification », C. Houdement).

a) Propriétés de linéarité additive.

Si deux suites sont proportionnelles,  $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Nombre de crayons	3	6	9
Prix du lot en €	1,20	2,40	3,60

b) Propriétés de linéarité multiplicative.

Si deux suites sont proportionnelles,  $f(kx) = k f(x)$

Nombre de crayons	3	6	9
Prix du lot en €	1,20	2,40	3,60

c) Combinaison des propriétés de linéarité additive et multiplicative.

$$f(ax + y) = af(x) + f(y)$$

Exemple : Le prix de 3 bonbons est 3,15 € ; le prix de 2 bonbons est 2,10 €.

Quel est le prix de 11 bonbons ?

Solution : Le prix de 11 bonbons c'est trois fois le prix de 3 bonbons plus le prix de 2 bonbons soit 11,55€ :  $(3 \times 3,15) + 2,10$ .

d) Le passage à l'unité.

Exemple : Le prix de 6 bonbons est 3 €. Combien coûtent 15 bonbons ?

Solution : 1 bonbon coûte 6 fois moins cher que 6 bonbons soit 0,50 €.  $(3 € : 6)$

15 bonbons coûtent 15 fois plus cher qu'un bonbon soit 7,50 €.  $(15 \times 0,5 €)$ .

e) La « règle de trois ».

La « règle de trois » permet d'oraliser le raisonnement et de « mettre en attente » les opérations à effectuer pour permettre d'éventuelles simplifications.

Exemple : Si 6 objets coûtent 4 euros, combien coûtent 9 objets ?

Solution : 1 objet coûte 6 fois moins (on ne fait pas la division, on attend) ;

9 objets coûtent 9 fois plus :  $4 \times 9$

6

On simplifie le calcul en multipliant d'abord 4 par 9.

f) Le coefficient de proportionnalité.

Dans une situation de proportionnalité, le rapport commun entre les nombres qui se correspondent est appelé coefficient de proportionnalité.

PROPORTIONNALITE ET TABLEAU



Sachant que 5 L d'essence coûtent 7 €, on peut compléter le tableau :

Quantité d'essence (en L)	5	10	15	1,5
Prix (en €)	7	14	21	2,10

1,4 est le COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITE

*Note: An arrow points from the text '1,4 est le COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITE' to the value '1,5' in the table, with the label 'x 1,4'.*

La compréhension de l'unité du coefficient de proportionnalité pose des problèmes puisqu'il s'agit souvent du quotient de 2 unités.

6) Les variables didactiques.

Les procédures	Les nombres et leurs relations
<ul style="list-style-type: none"><li>• Propriétés de linéarité (multiplicative, additive)</li><li>• Retour à l'unité</li><li>• Coefficient</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Entiers</li><li>• Décimaux</li><li>• Plus ou moins grands</li><li>• Relation plus ou moins explicite</li></ul>

7) Reconnaître des situations de proportionnalité.

Il est important de sensibiliser les élèves à la nécessité de vérifier la vraisemblance du résultat mathématique par rapport à la situation réelle.

Exemple : La taille de l'enfant qui double quand l'âge est doublé.

On pourra aussi mettre le doigt sur des situations proportionnelles qui restent de l'ordre de la prédiction.

Exemple : si 2 pommes pèsent 640 g, alors 4 pommes pèsent 1280 g.

### 8) Les points essentiels de l'enseignement de la résolution de problèmes de proportionnalité.

- Notion à développer sur le long terme (cycle 2 – cycle 3 – cycle 4)
- Progressivité dans les procédures attendues (linéarité puis passage à l'unité puis coefficient de proportionnalité)
- Jouer sur les variables « numériques » (taille des nombres / rapport interne / rapport externe / nature des nombres)
- Insister sur l'oral (explicitation et confrontation).
- Multiplier les contextes (vie courante et problèmes mathématiques)

### 9) Conclusion.

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée.

Dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité, différentes procédures sont à faire travailler par les élèves. Dans chacun des trois thèmes du programme, l'enseignant veille à oraliser les procédures possibles en termes similaires, ce qui permet aux élèves de les réinvestir dans différents registres – numérique – grandeurs – géométrique, tout en comprenant qu'elles relèvent de la même notion.

Les tableaux de proportionnalité ne doivent pas être conçus comme des objets d'enseignement. L'enseignant doit permettre aux élèves de dégager les avantages et inconvénients de différentes procédures possibles mais ne les présente pas comme les seules procédures attendues lors de la résolution d'un problème relevant de la proportionnalité.

### 10) Lien utile.

Ressources Eduscol « Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 » :

[https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Proportionnalite/96/4/RA16\\_C3\\_MATH\\_prop\\_ort\\_dossier\\_complet\\_576964.zip](https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Proportionnalite/96/4/RA16_C3_MATH_prop_ort_dossier_complet_576964.zip)